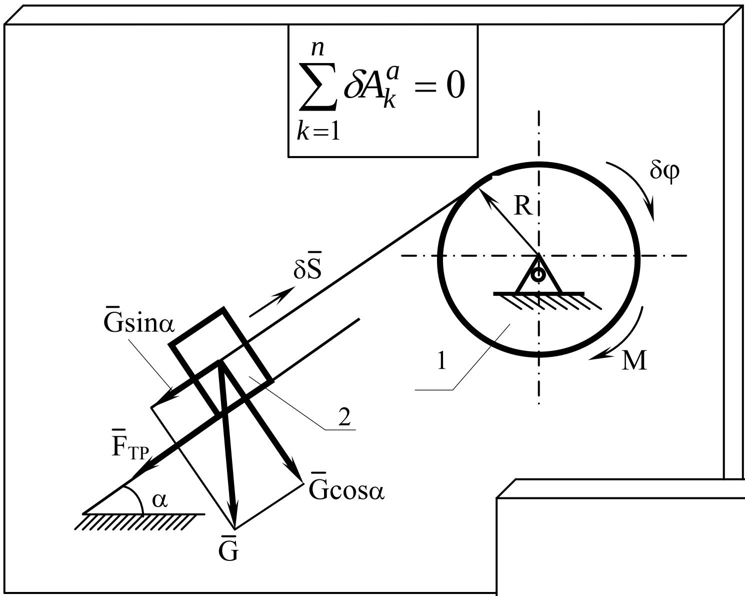
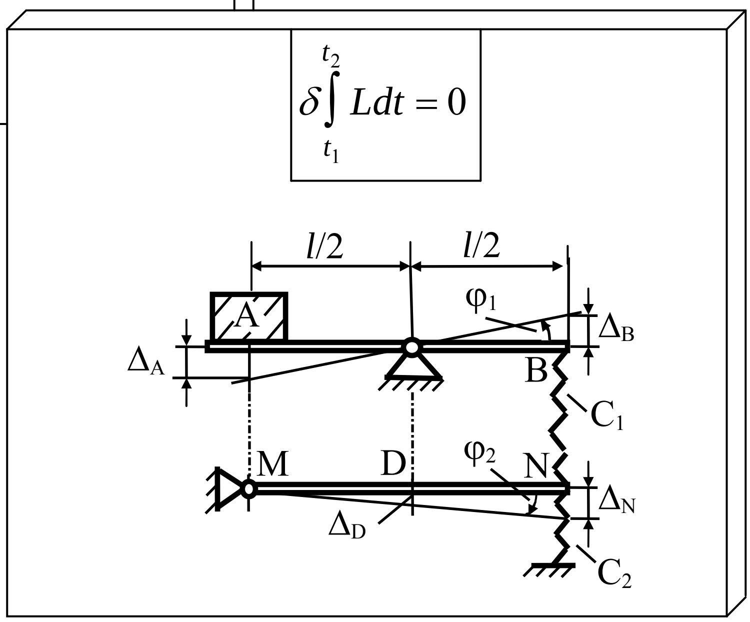
Н.М. Менькова



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ



МОСКВА 2006

Предисловие к учебному пособию «Решение задач теоретической механики на основе вариационных принципов»

В вузах, выпускающих специалистов по электротехнике, электронике и другим немеханическим специальностям, теоретическая механика не является профильной дисциплиной. Вследствие этого количество часов, отводимое на преподавание этого предмета, систематически уменьшается, а программа курса остается прежней. В результате студенты успевают проработать основные положения статики, кинематики и теоремы динамики, известные им из курса физики, а на такие важные разделы, как уравнения Лагранжа второго рода или малые колебания механических систем с одной и несколькими степенями свободы, времени нехватает. Между тем, именно эти главы теоретической механики имеют в настоящее время наибольшее практическое применение во многих областях науки и техники.

В такой ситуации, как нам кажется, следует не «комкать» существующую программу курса, а искать новые подходы к методике преподавания. Наиболее целесообразным представляется базирование на **вариационных принципах механики.** Так в основу изучения статики механических систем может быть положен **дифференциальный принцип возможных перемещений Лагранжа**, причем особенное внимание следует обратить на определение возможного перемещения как вариации функции обобщенной координаты. Из полученного в результате такого рассмотрения общего уравнения статики легко вывести уравнения равновесия механических систем и использовать их при решении традиционных задач теоретической и прикладной механики.

Дифференциальный принцип Даламбера-Лагранжа позволяет непосредственно перейти к разделу динамики. Однако наибольший эффект при решении задач движения систем под действием приложенных к ним сил дает применение **интегрального принципа Гамильтона-Остроградского.** Введению этого принципа должно предшествовать определение функции Лагранжа, обобщенной силы, а также **действия по Гамильтону** на прямом пути движения системы. На основе указанного принципа легко получить **уравнения Лагранжа второго рода** и в дальнейшем использовать их для описания движения сложных механических устройств, в том числе, при колебаниях систем со многими степенями свободы.

При указанном подходе к изложению материала возникает возможность рассмотреть также **канонические уравнения движения системы (уравнения Гамильтона)**, что представляет практический интерес и способствует расширению кругозора студентов.

В предлагаемом учебном пособии сделана попытка методического изложения данной концепции.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Н.М. МЕНЬКОВА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МОСКВА 2006

ББК 22.21
М 51
УДК 531.3

Рецензенты: к.т.н. Н.И. Алексеев, к.т.н. И.Н. Фальк.

М 51. Н.М. Менькова. Решение задач теоретической механики на основе вариационных принципов: Учебное пособие / Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)» - М., 2006 – 80 с.

ISBN 5-7339-0325-2

Рассматриваются дифференциальные и интегральные вариационные принципы механики и решение на их основе задач равновесия и движения механических систем. Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплины «Механика» и «Теоретическая механика».

Табл. нет. Ил.19. Библиогр.: 10 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.

ВВЕДЕНИЕ

Механика - это наука о законах движения и равновесия механических систем, причем ***под механической системой понимается такая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки определяется положением и движением всех составляющих систему элементов***. Примерами механических систем могут служить материальные тела – как абсолютно твердые, так и деформируемые. В теоретической механике рассматриваются только идеально твердые тела.

Условия, определяющие положение и перемещение в пространстве механических систем, базируются на известных законах Ньютона. Однако при решении задач механики можно исходить также из каких-либо других предпосылок, например, из ***вариационных принципов***. В науке принцип – это основное, исходное положение, позволяющее создать новое направление в какой либо теории или отрасли знания. В истории развития механики отмечены принципиальные положения, которые выдвигали Лагранж, Даламбер, Гамильтон, Гаусс и многие другие ученые. Уравнения, полученные на основе этих принципов, являются базой некоторых специальных разделов механики, а также теоретической физики.

Следует отметить, что не всякая идея может являться основоположением для дальнейшего развития механики – должны существовать критерии правильности выдвигаемых принципов. В качестве таких критериев приняты уже упомянутые законы Ньютона. Полученные на основе принципиально новых идей уравнения покоя и движения механических систем должны при решении демонстрировать незыблемость состояния инерции, пропорциональность действующих на систему сил и ускорений, равенство действия и противодействия.

При решении задач классической механики применение вариационных принципов позволяет сравнительно просто получить уравнения равновесия и движения механических систем и тем самым сделать курс теоретической механики более компактным и ёмким. При этом даже в условиях сокращённого учебного плана появляется возможность ввести в программу малые колебания механических систем, а также некоторые уравнения аналитической механики [1]. Это позволяет дополнительно рассмотреть решение ряда задач механики на современном уровне.

В заключение заметим, что изучению теоретической механики в данном аспекте должно предшествовать рассмотрение основных положений кинематики [2].

Эту работу автор посвящает памяти Ю.Н. Емельянова.

Глава 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА МАТЕРИАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ

1.1. Обобщенные координаты и скорости. Степень свободы механической системы

Важнейшими характеристиками механических систем являются ***обобщенные координаты - различные независимые друг от друга параметры, однозначно определяющие положение как всей системы в целом, так и каждой отдельной ее точки.***

Обобщенные координаты принято обозначать латинской буквой q. Если систему характеризуют s обобщенных координат, то их можно представить в порядке рассмотрения следующим образом: $q_1,.q_2,...q_i,...q_s$. Размерность обобщенных координат зависит от параметров, характеризующих систему: при линейных перемещениях это может быть ***метр***, при угловых – ***радиан***, величина безразмерная.

Декартовы координаты и радиус-вектор каждой точки системы являются функциями обобщенных координат, а также в общем случае и времени, поэтому справедливы зависимости:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, ..., q_s, t),\ y_k = y_k(q_1, q_2, ..., q_s, t),\ z_k = z_k(q_1, q_2, ..., q_s, t).$$

Для радиуса-вектора точки имеем: $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, ..., q_s, t)$.

На рисунке 1.1 представлена сложная механическая система - кривошипно-ползунный механизм. Покажем, что обобщенной координатой для этой системы является параметр φ - угол поворота кривошипа OA. Выразим через этот угол координаты каких-либо точек механизма, например, A и B.

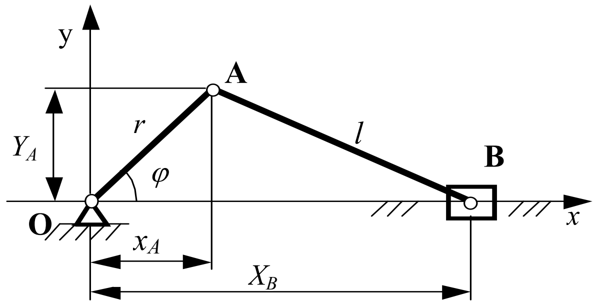


Рис.1.1

Обозначив длину кривошипа OA через r, а длину шатуна AB через l, получим: $x_A = r\cos\varphi$; $y_A = r\sin\varphi$;

$$x_B = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}; \quad y_B = 0.$$

Очевидно, координаты точек механизма действительно являются функциями обобщенной координаты φ.

Важнейшими характеристиками движения механической системы являются также ***обобщенные скорости*** - это производные обобщенных координат точек по времени:

$$\dot{q}_i = dq_i / dt, \quad (\,i{=}1,2,...s\,).$$

Размерность обобщенной скорости зависит от размерности обобщенной координаты: если q [м], то $\dot{q} = V$ [м/с] - линейная скорость; если q [рад], то $\dot{q} = \omega$ [1/с] – угловая скорость.

Обобщенные координаты определяют также ***число степеней свободы механической системы W - количество свободных независимых ее движений в пространстве***. Здесь и далее рассматриваются только так называемые голономные системы (см. раздел 1.2), число степеней свободы которых равно количеству обобщенных координат: $W = s$. Так положение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется одной обобщенной координатой φ - углом его поворота вокруг оси вращения, поэтому тело имеет одну степень свободы: $W = s = 1$.

При плоскопараллельном движении механическая система имеет три степени свободы, так как ее положение характеризуют три обобщенные координаты: два линейных параметра - координаты какой-либо точки A, принятой за полюс, - $q_1 = x_A$, $q_2 = y_A$ -

и угол поворота системы вокруг этого полюса - $q_3 = \varphi$ [2]. Очевидно, $s = W = 3$.

Системой с тремя степенями свободы является также твёрдое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. Обобщенными координатами здесь являются углы поворота тела вокруг трех неподвижных осей (углы Эйлера): $q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$ и $q_3 = \theta$. Соответственно имеем $s = W = 3$.

Примером системы с шестью степенями свободы является свободное твердое тело. Его положение в пространстве определяют координаты центра тяжести тела : x_c, y_c, z_c, - а также углы поворота вокруг координатных осей: φ, Ψ и θ. Таким образом, в данном случае $s = W = 6$.

Упругое твердое тело может иметь бесчисленное множество обобщенных координат и потому является механической системой со многими степенями свободы.

Число степеней свободы механизмов, состоящих из многих звеньев - кинематически связанных между собою твердых тел, определенным образом движущихся в пространстве, - вычисляется по специальным формулам [3], однако следует помнить о том, что любое независимое движение системы может быть реализовано с помощью того или иного ***движителя*** - опускающегося груза, электрического или механического двигателя, ручного привода. Поэтому при определении степеней свободы многозвенных механических систем можно ориентироваться на количество приводных устройств.

Показанный на рисунке 1.1. механизм имеет одну обобщенную координату, соответственно, одну степень свободы, и приводится в движение от одного электродвигателя, связанного с кривошипом OA.

На рисунке 1.2. изображен механизм слежения за движущимся объектом, который приводится в действие от двух источников: двигатель 1 равномерно вращает кулачок-коноид 2, а оператор, работающий с данным устройством, мануально перемещает вдоль оси кулачка толкатель 3 с помощью обоймы 4; таким образом, толкатель суммирует два движения. Имеем механизм с двумя степенями свободы, причем обобщенными координатами в данном случае являются угол поворота кулачка и линейное перемещение обоймы: $q_1 = \varphi, \ \ q_2 = x$. Соответственно, $s = W = 2$.

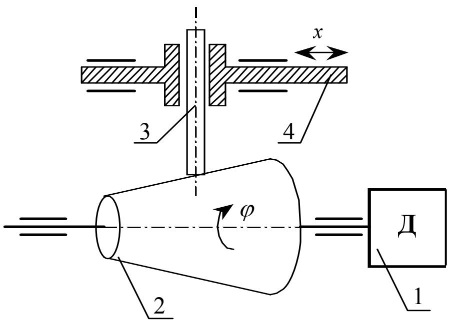


Рис. 1.2

Механизмы роботов и манипуляторов могут иметь много степеней свободы и соответствующее число приводных двигателей.

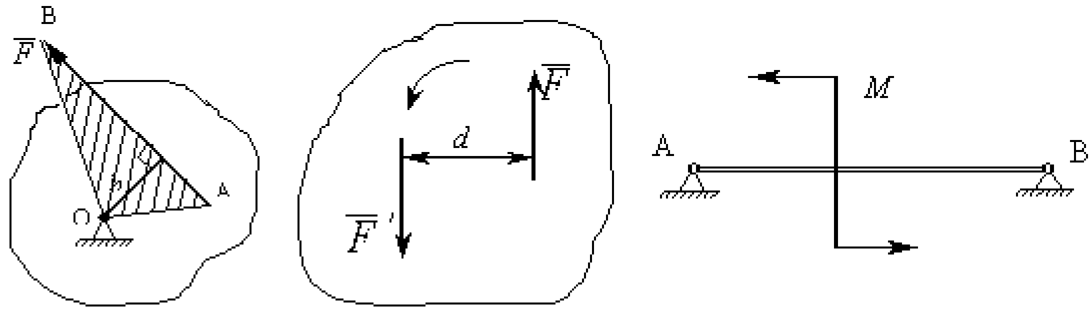
1.2. Силовые факторы, действующие на механическую систему. Связи и их реакции

Состояние равновесия или движения механической системы зависит от характера ее взаимодействия с другими материальными объектами. Количественной мерой такого взаимодействия является ***сила*** - векторная величина, которая, как известно, характеризуется модулем, точкой приложения и направлением в пространстве. Основной единицей для измерения силы в системе СИ служит ньютон (Н).

Все действующие на механическую систему силы можно разделить на ***внешние***, приложенные со стороны других объектов, и ***внутренние*** – возникающие между составляющими систему точками или телами. В теоретической механике изучаются недеформируемые системы, в основном, идеально твердые тела, поэтому далее рассматриваются только внешние силы. Кроме того, в задачах механики рассматриваются ***силы активные*** и, так называемые, ***реакции связей***.

Активные силы – это различные независимые друг от друга нагрузки, например, движущая сила, действующая на механизм со стороны двигателя, силы полезного сопротивления – те силы, для преодоления которых предназначен механизм, силы вредного сопротивления, например, силы трения.

На механическую систему могут действовать также ***моменты сил***, сообщающие этой системе вращательное движение. Если, например, некоторое тело закреплено в какой-либо точке O (рис. 1.3а), то сила F производит вращение в плоскости OAB, причем вращательный эффект оценивается произведением модуля силы на ***плечо*** h - расстояние от точки O до линии действия силы. В общем случае ***момент силы относительно точки О*** выражается формулой $M_o = m_o(F) = \pm Fh$. Принято считать момент положительным, если сила вращает систему против часовой стрелки; отрицательный момент производит вращение по часовой стрелке.



а б в

Рис. 1.3

Сила может также создавать ***вращательный момент относительно какой-либо произвольной оси*** в пространстве [2].

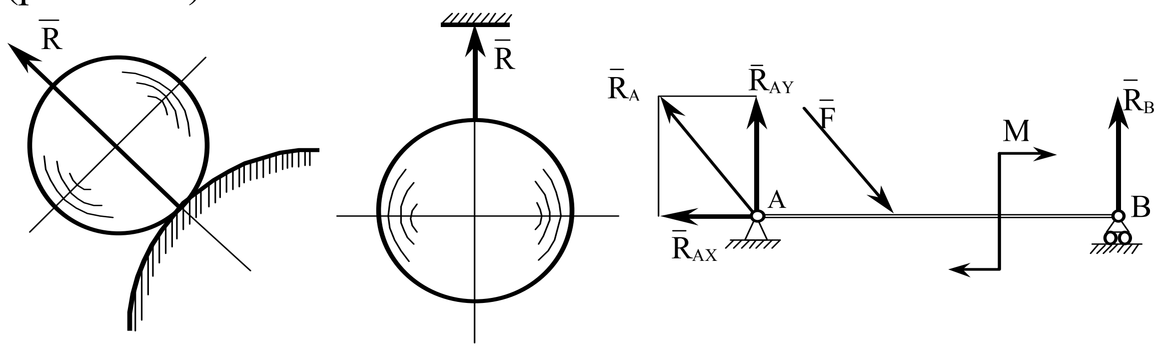
Вращение механической системе может сообщать ***пара сил***: две параллельные, равные по модулю и противоположно направленные силы $\overline{F}$ и $\overline{F}^{/}$ (рис. 1.3 б).

Вращательный эффект пары сил оценивается величиной ее момента: произведением одной из сил пары на плечо d - расстояние между линиями действия сил. Правило знаков то же, что для момента силы относительно точки. Таким образом, ***момент пары сил*** выражается формулой: $M = \pm Fd$.

Момент пары не связан с какой-либо точкой плоскости [2], поэтому приложенная к системе пара сил задается стрелкой, указывающей направление вращения, либо изображается в виде некоторой условной пары. В том и в другом случае задается только значение модуля момента (рис. 1.3*в)*.

Реакциями связей называются силы, с которыми различные связи действуют на механические системы, препятствуя их свободному перемещению в пространстве. Остановимся вначале на определении понятия связей - исключительно важной категории механики.

Связи это все те объекты, которые накладывают ограничения на координаты, скорости и ускорения точек механической системы. На рисунке 1.4 показаны конструкции некоторых распространенных типов связей и соответствующие им реакции. Реакция гладкой (без трения) поверхности направлена по нормали к этой поверхности (рис. 1.4*а*), реакция нити – вдоль этой нити (рис. 1.4 *б*).



а б в

Рис.1.4

Реакция неподвижного плоского шарнира, помещенного в точку A двухопорной балки (рис. 1.4в), зависит по величине и направлению от действующих на систему активных сил, поэтому при определении реакции $\overline{R}_A$ ее представляют геометрической суммой проекций на координатные оси: $\overline{R}_A = \overline{R}_{AX} + \overline{R}_{AY}$.

Реакция $\overline{R}_B$ шарнирно-подвижной опоры, расположенной справа на рисунке 1.4в, направлена перпендикулярно опорной поверхности: $\overline{R}_B \perp AB$.

Механическая система, на которую наложены те или иные связи, называется несвободной, причем условия, которые не позволяют точкам указанной материальной системы занимать произвольные положения в пространстве и иметь произвольные скорости, называются уравнениями (неравенствами) связей. Таким образом, следует различать ***конструкции связей*** и аналитические ***условия связей.***

Существует развернутая классификация связей в зависимости от соответствующих им условий ограничения, накладываемых на координаты и скорости системы. Не касаясь подробностей этой классификации, в достаточной мере освещенной в литературе по аналитической механике [1], отметим только, что связи, уравнения которых зависят от времени, называются ***нестационарными***. Уравнения же ***стационарных*** связей от времени не зависят. Если уравнение связи является функцией только координат точек системы, то связь называется ***геометрической***, если же в уравнение входят также скорости точек - производные координат по времени, - имеем ***кинематическую связь***.

Таким образом, если координаты точек системы x_k, y_k, z_k, а скорости этих точек - $\dot{x}_k$, $\dot{y}_k$, $\dot{z}_k$, то уравнение кинематической связи будет иметь вид: $f(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) = 0$.

Если при этом указанное уравнение можно проинтегрировать, то связь называется ***интегрируемой***, или ***голономной***. Отметим также, что существует понятие ***голономной системы*** - такой материальной системы, на которую наложены голономные связи.

Термин "голономный" (от двух греческих слов: holos - весь и nomos - закон) введен немецким физиком и механиком Генрихом Герцем (1857- 1894г.) в его работе «Принципы механики, изложенные в новой связи».

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

2.1. Вариация функции. Возможное перемещение.

Дифференциальные вариационные принципы дают критерии истинного движения и покоя системы, отнесенные к некоторому моменту времени.

Основной вариационных принципов механики является базовое понятие ***возможного перемещения*** как вариации функции обобщенной координаты – приращении этой функции при фиксированном значении аргумента [4].

Вариации функций - это особый класс бесконечно малых величин, рассмотрению которых посвящен специальный раздел математики - вариационное исчисление.

Создателем вариационного исчисления является французский математик и механик Луи Жозеф Лагранж (1736-1813) - автор многочисленных трудов по различным разделам математики, основоположник аналитической механики.

Дадим определение возможного перемещения и его геометрическую интерпретацию.

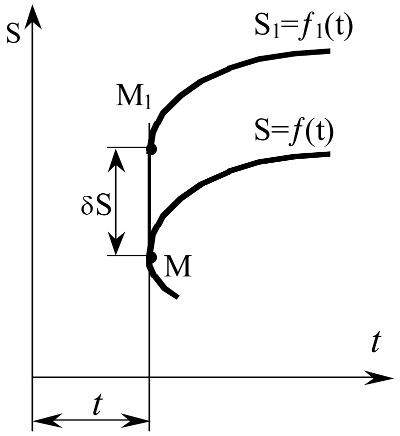
Возможным**, **или виртуальным перемещением материальной точки называется воображаемое бесконечно малое ее смещение, допускаемое связями, наложенными на точку в данный момент времени.

Пусть, например, точка *M* движется по закону $S = f(t)$ (рис. 2.1а). Представим себе, что в данный фиксированный момент времени *t* происходит ***мгновенное*** изменение функции. Законом движения становится зависимость $S_1 = f_1(t)$, а точка *M* переходит в положение M_1. Отрезок MM_1, обозначенный как δS, изображает ***вариацию функции*** $S(t)$, или ***возможное перемещение точки***. Греческая буква δ является общепринятым обозначением вариации функции.

Очевидно, вариации функций, определяемые при фиксированном аргументе (времени), существенно отличаются от дифференциалов, которые, как известно, вычисляют при бесконечно малом приращении аргумента. Однако законы варьирования функций внешне подобны соответствующим правилам дифференцирования [4].

Существует также понятие ***возможного перемещения системы***: так называют любую допускаемую наложенными на систему связями совокупность воображаемых бесконечно малых перемещений точек системы из занимаемого ими в данный момент времени положения.

В систематических курсах аналитической механики показывается, что вектор возможного перемещения точки перпендикулярен нормали к поверхности связи. Следовательно, при движении несвободной точки в пространстве в каждый момент времени можно себе представить бесчисленное множество возможных перемещений, лежащих в плоскости, касательной к поверхности связи [5].



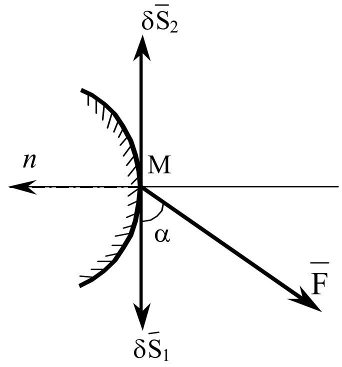


Рис.2.1

Если связь представляет собой плоскую кривую, то по касательной к ней в данной точке M в любой момент времени можно направить два возможных перемещения: $\overline{\delta S}_1$ и $\overline{\delta S}_2$ (рис. 2.1 б). Пусть в той же точке M приложена сила $\overline{F}$. ***Элементарная работа, которую могла бы совершить эта сила на данном возможном перемещении, носит название возможной (виртуальной) работы***.

Как известно, работа представляет собой скалярное произведение силы на соответствующее перемещение точки, то есть $A = FS\cos\alpha$, где α - угол между направлением действия силы и возможным перемещением. По аналогии возможная работа силы определяется выражением:

$$\delta A = F\delta S\cos\alpha .$$

Если F^a- активная сила, то ее возможная работа $\delta A^a = F^a\delta S\cos\alpha$; если R - реакция связи, то возможная работа этой реакции $\delta A^r = R\,\delta S\cos\alpha$.

Если к различным точкам системы приложено ***n*** активных сил и ***k*** сил реакций, то возможной их работой называют сумму соответствующих скалярных произведений:

$$\sum_{i,j}^{n,k} \delta A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} F_i^a \delta S_i \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} R_j \delta S_j \cos\alpha_j \,.$$

Дадим также имеющее важное значение в механике понятие ***идеальных связей*** - таких материальных объектов, силы реакций которых не совершают работу ни на одном из возможных перемещении. Если система имеет ***k*** идеальных связей, то работа соответствующих реакций равна нулю:

$$\sum_{j=1}^{k} \delta A_j^r = 0.$$

Примерами идеальных связей являются шарнирно-неподвижные опоры балок, нерастяжимые (недеформируемые) стержни и нити, абсолютно твердые и гладкие поверхности. В тех случаях, когда необходимо ввести в рассмотрение ***реакции шероховатых связей*** - силы и моменты трения, последние рассматриваются как активные силовые факторы.

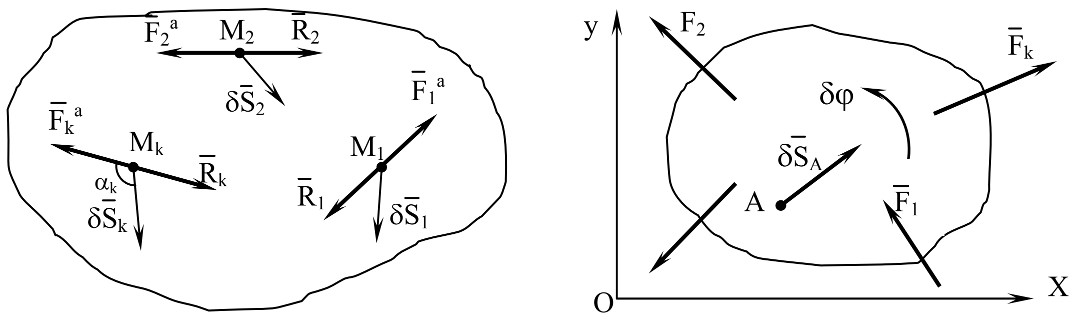
2.2.Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений был сформулирован Лагранжем в1788 году следующим образом: ***для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных (виртуальных) работ всех приложенных к системе активных сил на всех возможных перемещениях равнялась нулю.***

Покажем необходимость высказанной идеи. Рассмотрим несвободную механическую систему с идеальными связями, находящуюся в данный момент времени в равновесии. Пусть к каждой из ***k*** точек, составляющих систему, приложена некоторая активная сила (или равнодействующая нескольких сил) - F_k^a, а также реакция соответствующей связи - R_k (рис. 2.2а). Поскольку система находится в равновесии, имеем: $F_k^a + R_k = 0$.

Дадим системе некоторое возможное перемещение, при этом, в соответствии с приведенным выше определением, каждая точка может получить возможное перемещение δS_k. Возможная работа сил, приложенных к точке:

$$\delta A_k = F_k^a \delta S_k \cos\alpha_k + R_k \delta S_k \cos\alpha_k .$$



а б

Рис. 2.2

Для всех ***k*** точек системы можно составить аналогичные равенства и при их суммировании, учитывая равновесное состояние рассматриваемого объекта, получить, что элементарная работа всех сил системы на данном возможном перемещении равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^r = 0.$$

Учитывая, что работа идеальных связей на всех возможных перемещениях равна нулю, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a = 0 . \tag{2.1}$$

А также
$$\sum_{k=1}^{n} F_k^a \delta S_k \cos\alpha_k = 0. \tag{2.2}$$

В аналитической форме:
$$\sum_{k=1}^{n} (F_{kx}^a \delta x_k + F_{ky}^a \delta y_k + F_{kz}^a \delta z_k) = 0. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.1) - (2.3) это различные выражения ***общего уравнения статики***. Пользуясь этими уравнениями, можно решать любые задачи, связанные с равновесием механических систем.

Покажем, как на основе общего уравнения статики можно получить уравнения равновесия плоской системы сил. Пусть на данное твердое тело действуют силы F_1, $F_2,...F_k,...F_n$, лежащие в плоскости xoy (рис. 2.2 б).

Если тело совершает плоское движение, то оно перемещается поступательно вместе с полюсом - точкой A и поворачивается вокруг этого полюса на некоторый угол φ [2]. Дадим полюсу возможное перемещение δS_A; в разложении на координатные оси $\delta \overline{S}_A = \delta \overline{x}_A + \delta \overline{y}_A$. Одновременно укажем возможный поворот тела на элементарный угол $\delta\varphi$.

Применяя принцип возможных перемещений, запишем равенство нулю суммы работ всех приложенных к системе сил в форме уравнения (2.3), а также сумму работ моментов этих сил при повороте тела вокруг полюса A:

$$\sum_{k=1}^{n}(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k) + \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k)\delta\varphi = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\delta x_k + \sum_{k=1}^{n} F_{ky}\delta y_k + \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k)\delta\varphi = 0. \tag{2.4}$$

Так как переносное движение тела является поступательным, то $\delta x_k = \delta x_A$, $\delta y_k = \delta y_A$. Вынесем множители δx_k, δy_k, $\delta\varphi$ за знаки суммирования, приравняем нулю каждое из слагаемых уравнения (2.4) и при этом учтем, что возможные перемещения в данном рассмотрении не могут быть равными нулю. Тогда вместо одного уравнения (2.4) получим три условия равновесия системы, находящейся под действием плоской системы сил:

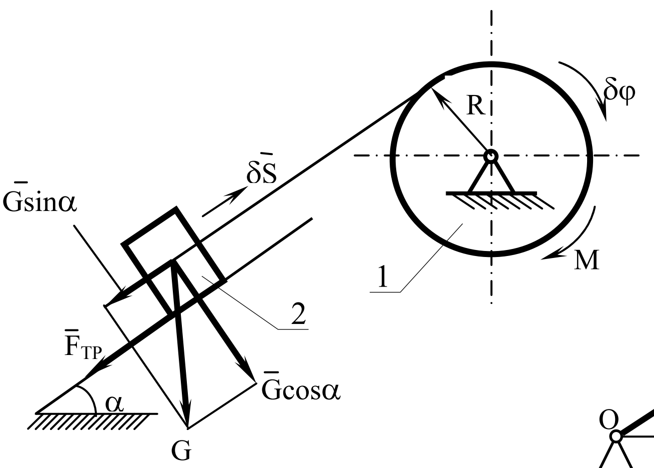
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_A(F_k) = 0\ . \tag{2.5}$$

Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на две взаимно перпендикулярные координатные оси были равны нулю и чтобы сумма моментов этих сил относительно любой точки плоскости была равна нулю.

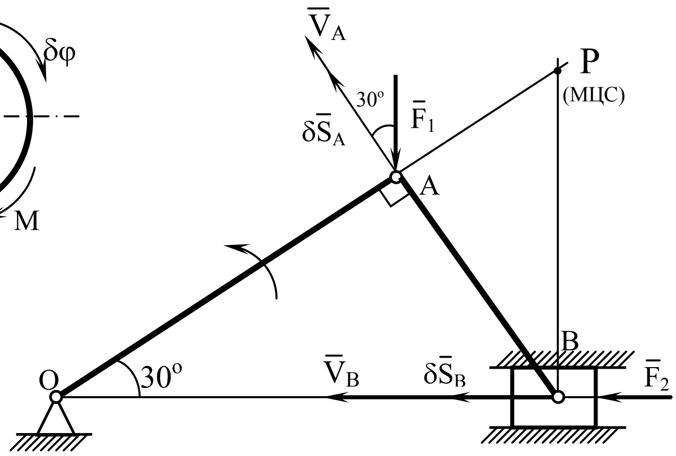
В заключение приведем примеры решения задач статики на основе принципа возможных перемещений.

Пример 2.1

Определить момент M, который надо приложить к барабану 1 радиуса R для равномерного подъема груза 2 весом G по наклонной плоскости с углом α при основании (рис. 2.3а). Коэффициент трения груза при перемещении по плоскости - f.



а



б

Рис.2.3

Покажем все силы, действующие на данную систему. Вес груза G разложим на две составляющие: силу нормального давления $G\cos\alpha$ и, так называемую, скатывающую силу $G\sin\alpha$. Сила трения зависит от силы нормального давления: $F_{TP} = fG\cos\alpha$.

Равномерное прямолинейное движение является частным случаем равновесия, поэтому для решения задачи можно воспользоваться общим уравнением статики в форме (2.2). Дадим барабану 1 возможное перемещение $\delta\varphi$, тогда возможное перемещение груза 2 будет равно $\delta S = R\,\delta\varphi$. Находим сумму возможных работ всех действующих на систему силовых факторов и приравниваем эту сумму нулю: $M\,\delta\varphi - G\sin\alpha\delta S - fG\cos\alpha\delta S = 0$.

Подставив вместо δS произведение $R\delta\varphi$ и сделав необходимые сокращения на множитель $\delta\varphi$, получим искомую величину движущего момента:

$$M = GR(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Пример 2.2

Найти, при каком соотношении сил F_1 и F_2 показанный на рисунке 2.3 б кривошипно-ползунный механизм будет находиться в равновесии, если в данный момент времени кривошип *OA* и шатун *AB* взаимно перпендикулярны, а угол *AOB* составляет 30°.

Дадим точке *A* возможное перемещение δS_A в направлении скорости точки *A*, при этом точка *B* получит возможное перемещение δS_B. Чтобы определить направление этого возможного перемещения, а также найти соотношение между δS_A и δS_B, построим для шатуна *AB* ***мгновенный центр скоростей (МЦС)***, вокруг которого в данный момент времени происходит поворот всех точек этого звена [2]. В соответствии с имеющимися рекомендациями, восставим перпендикуляры к направлениям скоростей V_A, V_B и на их пересечении найдем точку P - *МЦС*.

Возможные перемещения точек звена *AB*, также как и их скорости, направлены перпендикулярно радиусам вращения точек вокруг центра *P* и пропорциональны их длинам. Поэтому $\delta S_A \perp AP$, $\delta S_B \perp BP$, а также $\delta S_A / \delta S_B = AP/BP$.

Отсюда, учитывая, что $AP = BP\sin 30°$, находим соотношение возможных перемещений точек *A* и *B*:

$$\delta S_A = \delta S_B \sin 30°. \tag{2.6}$$

Составляем общее уравнение статики с учетом знаков работы сил F_1 и F_2, а также принимая во внимание угол между направлением действия силы F_1 и возможным перемещением δS_A:

$$-F_1\delta S_A\cos 30° + F_2\delta S_B = 0. \tag{2.7}$$

Подставив в уравнение (2.7) соотношение (2.6) и сокращая на δS_B, получим: $-F_1\sin 30°\cos 30° + F_2 = 0$.

С учетом значений функций углов: $F_2 = 0{,}433F_1$.

2.3. Общее уравнение динамики

Динамика - это раздел механики, в котором рассматривается движение материальных объектов, обладающих определенной инертностью, под действием приложенных к ним сил. Одним из способов решения задач динамики является совместное применение двух самостоятельных идей: ***принципа Лагранжа***, рассмотренного в разделе 2.2, и ***принципа Даламбера***.

Рассмотрим принцип Даламбера в применении к движению точки. Пусть точка массы m движется под действием силы $\overline{F}$ с ускорением $\overline{a}$. Уравнение ее движения $\overline{F} = m\overline{a}$. Перенесем произведение $m\overline{a}$ в левую часть этого уравнения и получим в результате: $\overline{F} - m\overline{a} = 0$. Назовем произведение $-m\overline{a}$ фиктивной силой инерции и обозначим ее через $\overline{\Phi}^u$, тогда уравнение движения точки будет иметь вид:

$$\overline{F} + \overline{\Phi}^u = 0. \tag{2.8}$$

Имеем уравнение покоя под действием двух сил, хотя на самом деле точка движется. Условие (2.8) носит название уравнения фиктивного равновесия точки.

Итак, если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам приложить фиктивную силу инерции, равную произведению массы этой точки на ее ускорение и направленную против этого ускорения, то можно рассматривать эту точку как условно уравновешенную.

Распространяя принцип Даламбера на механическую систему, получим, что если ко всем точкам этой системы, помимо действующих на них внешних и внутренних сил, приложить соответствующие инерционные силовые факторы, то полученную систему сил можно считать условно уравновешенной и применять к ней законы и методы статики. Способ решения задач динамики, основанный на принципе Даламбера, носит название ***метода кинетостатики***.

Легко показать, что при поступательном движении системы массы m, когда ускорения всех ее точек равны некоторой величине $\overline{a}$, сумма всех фиктивных сил инерции, приложенных к этим точкам, или ***главный вектор сил инерции*** будет определяться выражением: $\overline{\Phi}^{u} = -m\overline{a}$**.** Направлен этот вектор противоположно ускорению системы.

При вращательном движении системы фиктивное равновесие может быть достигнуто, если к ней приложить ***главный момент сил инерции***, равный произведению момента инерции системы I на ее угловое ускорение ε и направленный против этого ускорения: $M^{u} = -I\varepsilon$.

Напомним значения моментов инерции некоторых твердых тел [6]. Момент инерции сплошного круглого цилиндра массы m и радиуса R относительно оси его симметрии составляет $I_x = mR^2/2$. Момент инерции полого цилиндра или кольца - $I_x = mR^2$. Момент инерции тонкого стержня длиной L и массы m относительно центра его тяжести составляет $I_c = mL^2/12$, относительно оси, проходящей через его конец, - $I_x = mL^2/3$.

При плоскопараллельном движении механической системы для создания фиктивного равновесия к ней следует прикладывать как главный вектор сил инерции $\overline{\Phi}^{u} = -m\overline{a}_c$, так и главный момент сил инерции $M_c^{u} = -I_c\varepsilon$. Здесь a_c - скорость центра масс системы; I_c - момент инерции системы относительно центра ее масс.

Если механическая система условно уравновешена одним из указанных способов, то к ней можно применять принцип возможных перемещений (Лагранжа), учитывая элементарную работу как активных сил и моментов, так и приложенных инерционных силовых факторов:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{a} + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{u} = 0. \tag{2.9}$$

При движении системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных к ней сил и моментов как активных, так и инерционных, на всех возможных перемещениях равна нулю. Выражение (2.9) носит название ***общего уравнения динамики***. В аналитической форме:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[(F_{kx}^{a}+\Phi_{kx}^{u})\delta x_k+(F_{ky}^{a}+\Phi_{ky}^{u})\delta y_k+(F_{kz}^{a}+\Phi_{kz}^{u})\delta z_k\Big]=0. \quad (2.10)$$

Здесь $F_{kx}^{a}, F_{ky}^{a}, F_{kz}^{a}, \Phi_{kx}^{u}, \Phi_{ky}^{u}, \Phi_{kz}^{u}$ - проекции активных сил и сил инерции на координатные оси; δx_k, δy_k, δz_k - проекции возможных перемещений точек приложения этих сил.

Пример 2.3

Груз весом F опускается с помощью каната, перекинутого через блок, радиус которого R, а вес G (рис. 2.4). Определить угловое ускорение блока.

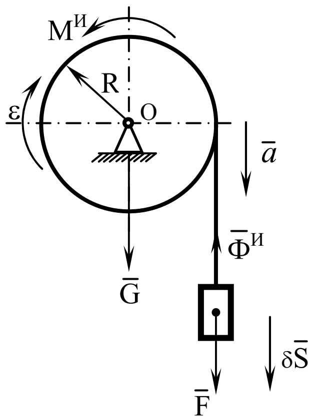


Рис. 2.4

Приложим к грузу силу инерции $\varPhi^{u}=-Fa/g$. Линейное ускорение груза выразим через угловое ускорение блока: $a=\varepsilon R$, тогда сила инерции будет равна $\varPhi^{u}=-F\varepsilon R/g$. Здесь g – ускорение силы тяжести. К блоку приложим момент сил инерции $M^{u}=-I_{O}\varepsilon$, причем, если блок представляет собой сплошной цилиндр, то момент его инерции $I_{o}=GR^{2}/2g$.

Дадим грузу возможное перемещение δS, тогда возможным перемещением блока будет элементарный угол $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi=\delta S/R. \quad (2.11)$$

Общее уравнение динамики:

$$F\delta S-\Phi^{u}\delta S-M^{u}\delta\varphi=0. \qquad (2.12)$$

Подставляя в уравнение (2.12) значения Φ^{u}, M^{u} и соотношение возможных перемещений (2.11), получим искомое угловое ускорение:
$$\varepsilon=\frac{2Fg}{(2F+G)R} \ (1/\text{ c}^2).$$

2.4. Обзор дифференциальных принципов

Выше были рассмотрены два дифференциальных вариационных принципа. Напомним их еще раз в порядке общего рассмотрения аналогичных идей.

1) Принцип возможных перемещений Лагранжа - общее уравнение статики:

$$\sum_{k=1}^{n}(F_{kx}^{a}\delta x_{k}+F_{ky}^{a}\delta y_{k}+F_{kz}^{a}\delta z_{k})=0.$$

2) Принцип Даламбера-Лагранжа - общее уравнение динамики:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[(F_{kx}^{a}+\Phi_{kx}^{u})\delta x_{k}+(F_{ky}^{a}+\Phi_{ky}^{u})\delta y_{k}+(F_{kz}^{a}+\Phi_{kz}^{u})\delta z_{k}\Big]=0.$$

В процессе развития механики выдвигались и некоторые другие обобщенные идеи, связанные с динамикой систем материальных точек. Отметим далее следующие дифференциальные принципы:

3) Принцип Журдена:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[(F_{kx}^{a}+\Phi_{kx}^{u})\delta\dot{x}_{k}+(F_{ky}^{a}+\Phi_{ky}^{u})\delta\dot{y}_{k}+(F_{kz}^{a}+\Phi_{kz}^{u})\delta\dot{z}_{k}\Big]=0. \qquad (2.13)$$

Французский ученый Журден опубликовал свой принцип в 1903 году в английском «Математическом журнале» [1].

В уравнении (2.13) варьируются не координаты, а скорости, поэтому каждое из слагаемых, стоящих под знаком суммы в правой части этого уравнения, представляет собой произведение силы на скорость и имеет размерность мощности. Вследствие этого принцип Журдена носит еще название ***принципа возможных мощностей*** и широко используется при решении задач прикладной механики.

4) ***Принцип наименьшего принуждения***, предложен в 1829 году Гауссом:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(F_{kx}^{a}+\Phi_{kx}^{u})\delta\ddot{x}_k+(F_{ky}^{a}+\Phi_{ky}^{u})\delta\ddot{y}_k+(F_{kz}^{a}+\Phi_{kz}^{u})\delta\ddot{z}_k\right]=0. \quad (2.14)$$

Гаусс Карл Фридрих (1777-1855- немецкий ученый, широко известный своими трудами по математике, физике, теории электричества и магнетизма, геодезии и астрономии.

Принуждением по Гауссу называется произведение силы на ускорение. Очевидно, в уравнении (2.14) варьируются ***ускорения***, так что данный принцип является наиболее обобщенным из всех рассмотренных выше. Размерность слагаемых в правой части уравнения - Нм/с^2. В современной механике соответствующая этой размерности физическая величина носит название ***рывка***, или ***вихря***.

Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

Интегральные вариационные принципы механики относят свои критерии к конечному интервалу времени. Создателями важнейших интегральных принципов являются Гамильтон, Остроградский, Мопертюи, Лагранж.

Гамильтон Уильям Роуан (1805-1865) - ирландский (английский) ученый, автор многочисленных трудов по математике и аналитической механике.

Остроградский Михаил Васильевич (1801-1862) - замечательный русский ученый; труды по математике, аналитической и небесной механике, теории упругости, гидромеханике, баллистике.

Мопертюи Пьер Луи Моро (1698-1759) - французский физик, занимался практическими измерениями низких температур.

Далее вариационные интегральные принципы будут рассмотрены ретроспективно, то есть начиная с принципа Гамильтона-Остроградского, выдвинутого позднее других, но не утратившего своего значения до настоящего времени. Этот принцип с полным основанием можно считать базой современной механики и физики.

Заметим, что восприятию интегральных принципов - этих весьма обобщенных философских положений - должно предшествовать усвоение и повторение некоторых более простых и отчасти известных из курса физики понятий.

3.1.Функция Лагранжа. Кинетическая и потенциальная энергия системы

Функцией Лагранжа, или ***кинетическим потенциалом*** называют разность кинетической и потенциальной энергии механической системы:

$$L = T - \Pi .$$

Гамильтон ввел эту функцию в рассмотрение, назвал ее в честь своего великого предшественника и использовал при формулировке оригинального вариационного принципа. Напомним основные характеристики физических величин, составляющих кинетический потенциал механической системы.

Кинетическая энергия Т - это обобщенный показатель движения механической системы, так как этот вид энергии зависит от обобщенных скоростей и инерционных характеристик (массы, моментов инерции) всех объектов, входящих в состав механической системы.

При поступательном движении системы кинетическая энергия определяется выражением: $T = mV^2/2$, где m - масса системы, V - линейная скорость точек.

При вращательном движении $T = I\omega^2/2$, где I - момент инерции системы, ω - ее угловая скорость.

При плоскопараллельном движении $T = mV_C^2/2 + I_C\omega^2/2$, где V_c - скорость центра масс системы, I_c - момент инерции системы относительно центра масс, ω - угловая скорость ее враще-ни $\overline{V}_C = \overline{V}$ я.

Пример 3.1

Груз 1, опускаясь вниз, поднимает каток 3 по наклонной плоскости с углом α при вершине посредством каната, перекинутого через блок 2 (рис. 3.1). Найти кинетическую энергию системы, если массы показанных на рисунке тел равны, соответственно, m_1, m_2, m_3 (веса – G_1, G_2, G_3). Блок 2 и каток 3 представляют собой сплошные однородные цилиндры радиуса R.

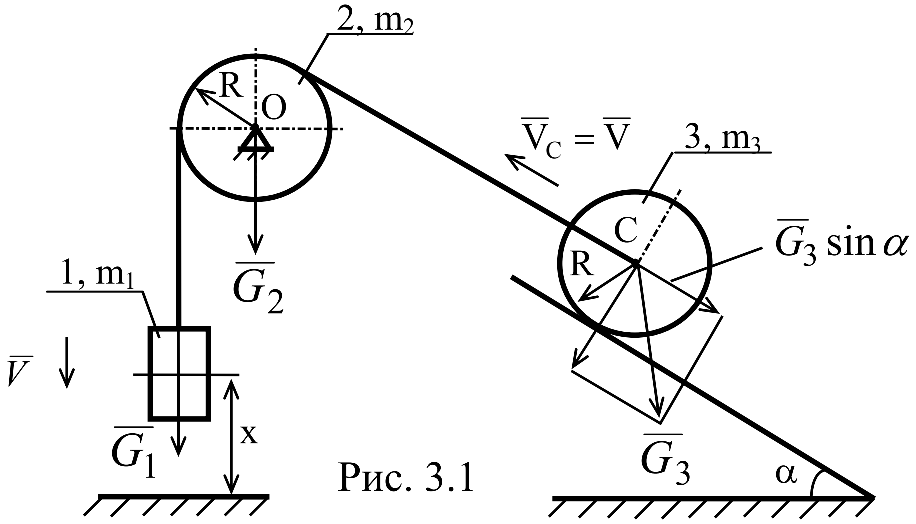


Рис. 3.1

Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2 + T_3$.

Здесь $T_1 = m_1 V^2 / 2$ - кинетическая энергия груза 1. $T_2 = I_o \omega^2 / 2$ - кинетическая энергия барабана 2, причём $I_o = m_2 R^2 / 2$ - момент инерции барабана, $\omega = V/R$ - его угловая скорость; после соответствующих подстановок получим $T_2 = m_2 V^2 / 4$. T_3 - кинетическая энергия катка 3, который совершает плоскопараллельное движение; учитывая, что скорость центра масс катка $V_c = V$, момент его инерции относительно точки C - $I_c = m_3 R^2 / 2$, а угловая скорость $\omega = V/R$, получим: $T_3 = m_3 V^2 / 2 + m_3 R^2 V^2 / 4R^2 = 3 m_3 V^2 / 4$. Суммарно:

$$T = \frac{m_1 V^2}{2} + \frac{m_2 V^2}{4} + \frac{3}{4} m_3 V^2 = \frac{V^2}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{2} m_3 \right). \quad (3.1)$$

Выражение, стоящее в скобках уравнения (3.1), носит название ***обобщенной,*** или ***приведенной массы системы (инерционного коэффициента)***:

$$m_{пр} = m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{2} m_3 . \quad (3.2)$$

В заключение можно отметить, что кинетическая энергия есть функция обобщенных скоростей всех точек механической системы: $T = T(\dot{q}_i)$.

Потенциальная энергия П характеризует положение механической системы в потенциальном силовом поле.

Силовое поле - это область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда материальную частицу действует сила, однозначно определенная по величине и направлению.

В потенциальных, или консервативных полях работа силы зависит только от начального и конечного положения точки приложения силы. Приведем известный из физики пример: в потенциальном поле силы тяжести работа по подъему груза весом G на некоторую определенную высоту h по вертикали равна работе по перемещению того же груза вдоль наклонной плоскости длиной L с углом при основании α:

$$A = Gh = GL \sin\alpha .$$

Потенциальными являются также поля сил тяготения и восстанавливающих сил упругих элементов. Силы веса, тяготения, упругости, как и образуемые ими поля, носят название потенциальных, или консервативных***. Скалярная величина, равная работе консервативных сил при перемещении материальной точки из некоторого нулевого положения в заданное, называется потенциальной энергией.***

Поверхности равного уровня потенциальной энергии носят название ***эквипотенциальных***. Если точка перемещается с нулевой эквипотенциальной поверхности ($П_0=0$) в заданное положение с координатами $x, y, z,$ то потенциальная энергия этой точки составит $П = П(x, y, z)$. Очевидно, потенциальная энергия зависит от координат перемещающейся точки и является функцией нескольких переменных.

Еще одно важное замечание. Чтобы увеличить запас потенциальной энергии, точка должна перемещаться против силовых линий поля, направленных всегда к нулевой эквипотенциальной поверхности, а значит работа консервативных сил в этом случае отрицательна. При перемещении точки с поверхности более высокого потенциального уровня на более низкий работа приложенных к ней сил положительна, а потенциальная энергия отрицательна вследствие отрицательной разности координат, характеризующих положение точки. Таким образом, потенциальная энергия точки (системы) и работа сил поля на перемещении материального объекта противоположны по знаку:

$$\Pi = -\sum_{k=1}^{n} A_k \, . \tag{3.3}$$

Приведем выражения потенциальной энергии для некоторых консервативных полей [6]. Потенциальная энергия при подъеме груза весом G на высоту $z = h$ над землей (нулевой эквипотенциальной поверхностью) составит $\Pi = Gz$. При опускании груза потенциальная энергия уменьшается. В общем случае

$$\Pi = \pm Gz \, .$$

Потенциальная энергия пружины пропорциональна квадрату ее линейной деформации x. Если обозначить коэффициент пропорциональности (жесткость пружины) через C, то в этом случае будем иметь: $\Pi = Cx^2/2$.

Как было показано в разделе 1.1, декартовы координаты являются функциями обобщенных координат, поэтому потенциальная энергия механической системы также представляет собой функцию обобщенных координат:

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots q_s) \, .$$

Учитывая все вышесказанное о кинетической и потенциальной энергии, можно утверждать, что кинетический потенциал L является функцией как обобщенных координат, так и обобщенных скоростей. В случае нестационарных связей функция Лагранжа явно зависит также от времени t. Таким образом,

$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, $(i = 1,.2,...s)$.

Обобщенные координаты, скорости и время называются переменными Лагранжа.

3.2. Обобщенная сила. Выражение обобщенных сил в потенциальном поле

По определению, ***обобщенная сила* Q*ᵢ* *- это такая условная сила, элементарная работа которой на возможном перемещении* δq_i *равна сумме возможных работ всех приложенных к системе сил на том же возможном перемещении*** [5].

Пусть механическую систему составляет *n* материальных точек, к каждой из которых приложены силы F_1, F_2,... F_K,... F_n. Система имеет *W* степеней свободы и, соответственно, $s = W$ обобщенных координат: q_1, q_2,... q_i,... q_s. Сообщим системе возможное перемещение δq_i, тогда каждая точка получит возможное перемещение δS_k. Сумма элементарных работ всех сил системы:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} F_k \delta S_k \cos\alpha_k .$$

В соответствии с определением находим обобщенную силу:

$$Q_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} \delta A_k}{\delta q_i}, \quad \text{или} \quad Q_i. = \sum_{k=1}^{n} F_k \frac{\delta S_k \cos\alpha_k}{\delta q_i}. \qquad (3.4)$$

Через радиусы-векторы точек: $Q_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \frac{(\delta \overline{r}_k)_i}{\delta q_i}$.

Размерность обобщенной силы: [Q] = [A] ⁄ [q].

Очевидно, размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты: если [*q*] - линейная величина, то размерность обобщенной силы - ньютон (Н). Если [*q*] – радиан, то Q имеет размерность Нм и является моментом.

Если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором одновременно изменяются все s обобщенных координат, то суммарная элементарная (возможная) работа всех приложенных к системе сил будет составлять:

$$\sum_{i=1}^{s} \delta A_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2\ \delta q_2\ ... + Q_i \delta q_i\ ... + Q_s\ \delta q_s. \qquad (3.5)$$

Из уравнения (3.5) следует, что количество обобщенных сил системы соответствует числу ее обобщенных координат, а также то, что обобщенные силы представляют собой коэффициенты при вариациях обобщенных координат.

Пример 3.2

Груз весом G движется под действием силы F вверх по наклонной плоскости с углом α при вершине, преодолевая момент сопротивления на барабане M_c (рис. 3.2). Найти обобщённую силу, учитывая, что коэффициент трения на наклонной плоскости равен f.

Система имеет одну степень свободы. Примем за обобщенную координату перемещение груза: $q = S$ - и дадим грузу возможное перемещение δS, тогда барабан повернется на угол $\delta\varphi = \delta S / R$.

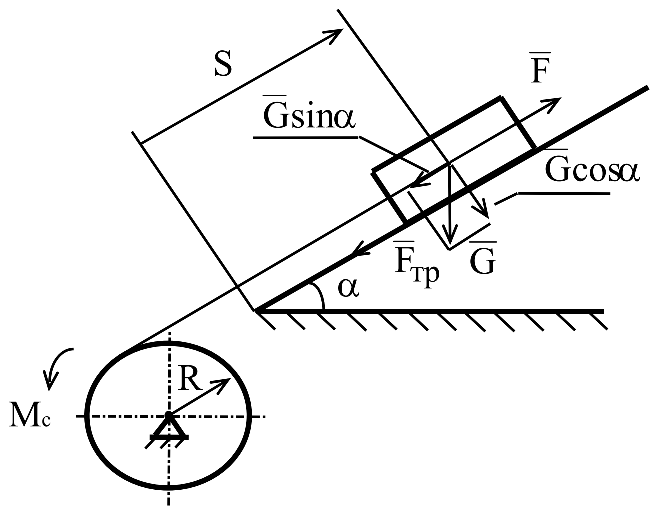


Рис.3.2

На данном возможном перемещении найдём сумму элементарных работ движущей силы F, момента M_c, скатывающей силы $G\sin\alpha$ и силы трения $F_{TP} = fG\cos\alpha$:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = F\delta S - (G\sin\alpha + fG\cos\alpha)\delta S - M_c\,\delta S/R.$$

В соответствии с уравнением (3.4):

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k \,/\, \delta S, \text{ или}$$

$$Q = F - G(\sin\alpha + f\cos\alpha) - M_c/R \quad (\text{Н}).$$

Здесь обобщенный силовой фактор имеет размерность ***силы.*** Однако нетрудно показать, что если барабану дать возможное перемещение δφ, и выразить через этот элементарный угол возможную работу всех сил, приложенных к системе, то обобщенная сила будет выступать в качестве ***момента*** и иметь соответствующую размерность:

$$Q = FR - GR(\sin\alpha + f\cos\alpha) - M_c \quad (\text{Нм}).$$

Рассмотрим далее, как можно выразить обобщенную силу в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия, как было показано выше, является функцией обобщенных координат, поэтому её полная вариация (по аналогии с полным дифференциалом) будет определяться выражением:

$$\sum_{i=1}^{s} \delta\Pi_i = \frac{\partial\Pi}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial q_2}\delta q_2 \ \ldots + \frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\delta q_i \ \ldots + \frac{\partial\Pi}{\partial q_s}\delta q_s\,. \tag{3.6}$$

Сопоставим уравнения (3.6) и (3.5), а также учтем, что сумма работ консервативных сил и уровень потенциальной энергии системы противоположны по знаку (уравнение 3.3). Приравнивая коэффициенты при вариациях обобщенных координат, получим:

$$Q_1 = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_1};\ Q_2 = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_2};\ \ldots\ Q_S = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_s}\,.$$

В общем случае: $$Q_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}. \tag{3.7}$$

Таким образом, ***обобщенная сила в потенциальном поле равна взятой со знаком минус частной производной от потенциальной энергии по обобщенной координате.***

3.3. Принцип Гамильтона-Остроградского

Этот принцип был сформулирован Гамильтоном в 1836 году для механических систем со стационарными связями на базе разработанной ученым оптико-механической аналогии. Гамильтон показал, что уравнения распространения света и движения механических систем одинаковы по своей форме.

Независимо от Гамильтона тот же принцип был сформулирован в 1848 году М.В. Остроградским для механических систем более общего вида с нестационарными связями.

В основе данного принципа лежит так называемое ***действие по Гамильтону*** - криволинейный интеграл вида

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt\,. \tag{3.8}$$

Подынтегральной функцией этого выражения является кинетический потенциал Лагранжа $L = T - \Pi$, имеющий размерность работы. В связи с этим можно утверждать, что ***действие по Гамильтону выражает работу сил при движении системы на прямом пути***.

Дадим необходимые пояснения. Движение механической системы со многими степенями свободы можно представить как перемещение некоторой ***изображающей точки М***, координаты которой соответствуют комбинации обобщенных координат системы в данный момент времени: $M=M(q_1,\ q_2,\ \ldots q_s,\ t)$. В частном случае изображающей точкой может служить центр масс системы. ***Геометрическое место действительных положений изображающей точки называется ее прямым путем***. Можно также сказать, что прямой путь - это расчетная траектория точки M, причем конфигурация этой траектории совсем не обязательно прямая линия.

На рисунке 3.3 показан прямой путь некоторой изображающей точки - кривая AMB, построенная в координатах q_i - t. Если система имеет s обобщенных координат, то прямой путь системы может быть описан системой уравнений вида

$$q_1 = q_1(t),\ q_2 = q_2(t),\ \dots\ q_i = q_i(t),\ \dots q_s = q_s(t).$$

Можно себе представить, что в любой данный момент времени каждая из переменных q_i может измениться на некоторую бесконечно малую величину δq_i- вариацию координаты. В результате таких изменений изображающая точка, возможно, начнет перемещаться по кривой AM_1B или AM_2B. ***Геометрическое место воображаемых смещенных от прямого пути положений изображающей точки называется окольным путем системы, или кривой сравнения.*** Уравнения окольного пути:

$$q_i^* = q_i(t) + \delta q_i, \qquad (i = 1, 2, \dots s).$$

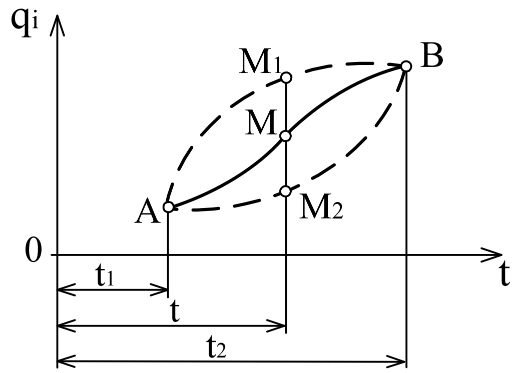


Рис. 3.3

Как видно из рисунка 3.3, смещения на старте и финише движения точки отсутствуют - концы прямого и окольных путей как бы закреплены. Условия «закреплённости концов» имеют вид:

$$\delta q_{i_{/t=t_1}} = 0, \qquad \delta q_{i_{/t=t_2}} = 0\ . \tag{3.9}$$

Итак, ***действие по Гамильтону (3.8) - это определенный интеграл, который в интервале времени от t_1 до t_2 на прямом пути движения системы имеет стационарное значение***. Это первая формулировка ***принципа стационарного действия*** Гамильтона-Остроградского.

Действительные стационарные числа, которые можно поставить в соответствие каждой функции определенного класса, носят название функционалов и обозначаются литерой I [8].

Действие по Гамильтону, таким образом, представляет собой функционал, поэтому математическая запись первой формулировки рассматриваемого принципа имеет вид:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = I . \tag{3.10}$$

Всякое отклонение от прямого пути - это уже путь окольный, поэтому стационарное движение системы возможно только в том случае, если вариация функции S равна нулю, то есть δS=0. Отсюда вторая формулировка принципа Гамильтона-Остроградского: ***вариация действия по Гамильтону δS на прямом пути - при действительном движении системы - равна нулю:***

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 . \tag{3.11}$$

Известно, что если первая производная функции (или аналогичная ей вариация) обращается в нуль, то сама функция в соответствующей точке имеет экстремум. Характер этого экстремума определяет вторая производная (вариация) функции. Французский ученый Серре в 1871 году исследовал функцию действия по Гамильтону и показал, что при действительном движении системы с учетом некоторых ограничений, наложенных на пределы интегрирования, вторая вариация этой функции больше нуля: $\delta^2 S > 0$. Это значит, что функция (3.8) в некоторой точке имеет минимум.

Отсюда третья формулировка принципа Гамильтона-Остроградского: ***действие по Гамильтону на прямом пути минимально***. Вследствие такого утверждения идею Гамильтона-Остроградского называют также ***принципом наименьшего действия.***

3.4. Другие интегральные принципы

Идею о минимальной работе движущих сил на прямом пути движения системы высказывали некоторые учёные раньше Гамильтона. Одним из первых принцип наименьшего действия предложил французский физик Мопертюи. Наблюдая явления природы и делая соответствующие философские обобщения, он в 1744 году писал: «Природа, производя свои манипуляции, всегда пользуется наиболее простыми действиями».

Мопертюи ввел свой показатель действия: интеграл $\int VdS$, где V - скорость, S - путь. В соответствии с предположением Мопертюи, «для действительного движения частицы интеграл $\int VdS$, взятый по отрезку траектории между двумя какими-либо её точками, есть минимум по сравнению с такими же интегралами, взятыми по отрезкам других кривых, проведенными между теми же точками».

К этому высказыванию ученые - современники Мопертюи отнеслись вначале с недоверием, так как автор не дал никаких доказательств своего принципа. Но впоследствии этой идеей заинтересовались Эйлер, а также Лагранж, который дал чёткую формулировку и математическое доказательство принципа Мопертюи, а также предложил свой интеграл действия:

$$W = \int_0^t 2T dt .$$

Здесь T - кинетическая энергия системы.

Действие по Лагранжу в действительном движении голономной консервативной системы на данном отрезке прямого пути ***минимально*** по сравнению со значениями интеграла W для других кинематически возможных движений, совершаемых при том же уровне энергии.

Мопертюи и Лагранж жили в разные годы и не могли проводить совместных научных исследований, но впоследствии история науки объединила предложенные ими идеи в один общий ***принцип наименьшего действия***.

К интегральным вариационным принципам можно отнести также ***принцип прямейшего пути***, предложенный Герцем [7]: «Всякая свободная материальная система движется по прямому пути, будучи предоставлена себе самой». Принцип Герца является обобщением первого закона Ньютона - закона инерции.

3.5 Уравнения Лагранжа второго рода

В настоящее время задачи теоретической и прикладной механики решаются с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Однако вывод этих уравнений, предложенный самим Лагранжем, отличается известной сложностью. Гораздо проще получить эти уравнения на основе принципа Гамильтона-Остроградского [7].

Внесем значок вариации δ под интеграл выражения (3.11):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt \; . \qquad (3.12)$$

Учитывая, что функция Лагранжа L зависит от обобщенной координаты q_i и обобщенной скорости $\dot{q}_i$, запишем вариацию функции δL по аналогии с полным дифференциалом:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right). \qquad (3.13)$$

Тогда вместо выражения (3.12) будем иметь:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = 0 . \qquad (3.14)$$

Преобразуем второй интеграл, входящий в выражение (3.14): используем переместительное свойство операторов [8] и учтем при этом, что $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$. Тогда можно записать:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt . \qquad (3.15)$$

Интегрируя выражение (3.15) по частям, получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt = \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt . \qquad (3.16)$$

Уменьшаемое разности (3.16) равно нулю, так как $\delta q_{i_{/\,t=t_1}} = \delta q_{i_{/\,t=t_2}} = 0$ по условию «закреплённости концов» (3.9). Таким образом, результатом интегрирования выражения (3.15) оказывается последний член уравнения (3.16). Подставим его в уравнение (3.14) и внесем под знаки интеграла и суммы:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i dt=0. \qquad (3.17)$$

Так как интервал интегрирования здесь произволен, то равенство (3.17) выполняется только в том случае, если выражение, стоящее под интегралом, - нуль. Учтем также, что $\delta q_i \neq 0$ и вариации обобщенных координат независимы друг от друга. Наконец, изменив знаки членов уравнения (3.17) на противоположные, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0; \quad (i=1,2,...., s). \qquad (3.18)$$

Выражения (3.18) носят название ***уравнений Лагранжа второго рода***. Здесь s - число обобщенных координат, равное числу степеней свободы механической системы. Значит для системы со многими степенями свободы следует составлять столько уравнений Лагранжа второго рода, сколько обобщенных координат имеет эта система.

Представим уравнения (3.18) в другой форме. Учтем, что $L = T - \Pi$, а потенциальная энергия от обобщенных скоростей не зависит. Тогда после соответствующих подстановок получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=0; \quad (i=1, 2,...., s). \qquad (3.19)$$

Перенесем последний член уравнений (3.19) в правую часть и учтем, что взятая со знаком минус производная потенциальной энергии по обобщенной координате в соответствии с уравнением (3.7) представляет собой обобщенную силу в консервативном поле. Имеем еще один вид уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i; \quad (i = 1, 2,..., s). \qquad (3.20)$$

Если к механической системе приложены непотенциальные силовые факторы, например, момент от электродвигателя или вязкое сопротивление, то обобщенные силы в правой части уравнений (3.20) должны включать в себя эти составляющие.

Уравнения Лагранжа второго рода рекомендуется составлять в нижеследующем порядке. 1) Изобразить механическую систему в заданном положении и показать на рисунке все действующие на нее силы и моменты. 2) Установить число степеней свободы механической системы и выбрать обобщенные координаты; составить уравнения Лагранжа второго рода в общем виде. 3) Определить кинетическую энергию системы T и найти ее производные по обобщенным скоростям, координатам и времени. 4) Определить потенциальную энергию системы и найти ее производные по обобщенным координатам либо вычислить обобщенные силы, соответствующие каждой из обобщенных координат. 5) Результаты вычислений по пунктам 3 и 4 подставить в исходные уравнения Лагранжа второго рода.

Пример 3.3

Для заданной системы (рис.3.1) составить уравнение Лагранжа второго рода и найти ускорение груза 1.

Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем перемещение груза 1: $q = x$ - и составим уравнение Лагранжа второго рода в форме (3.20):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \mathrm{Q}. \tag{3.21}$$

Кинетическая энергия системы определена в примере 3.1. Учитывая, что скорость груза 1 - это производная обобщенной координаты по времени: $V = \dot{x}$- уравнение (3.1) запишем следующим образом: $T = m_{np}\dot{x}^2/2$, причем приведенная масса m_{np} определяется уравнением (3.2).

Производные кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x}m_{np}\ , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x}m_{np}\ , \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{3.22}$$

Найдем обобщенную силу. Дадим грузу 1 возможное перемещение δx. Сумма элементарных работ силы веса груза 1: $G_1=m_1g$ и действующей на каток 3 скатывающей силы $G_3 \sin\alpha = m_3 g \sin\alpha$ - на данном возможном перемещении составит:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = (m_1 g - m_3 g \sin\alpha)\delta x \,.$$

Обобщенная сила на том же возможном перемещении:

$$\mathrm{Q} = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k \,/\, \delta x \,.$$

После сокращения на δx имеем:

$$\mathrm{Q} = m_1 g - m_3 g \sin\alpha \,. \qquad (3.23)$$

Подставим значения производных (3.22) и обобщенную силу (3.23) в исходное уравнение (3.21). Уравнение движения имеет вид:

$$m_{np}\ddot{x} = g(m_1 - m_3 \sin\alpha)\,. \qquad (3.24)$$

Отметим, что полученное выражение (3.24) полностью соответствует второму закону Ньютона, хотя оно было получено из уравнения Лагранжа второго рода (3.21).

Подставив в уравнение (3.24) значение обобщенной массы из выражения (3.2), получим значение ускорения груза 1:

$$a = \ddot{x} = g\frac{m_1 - m_3 \sin\alpha}{m_1 + \dfrac{m_2}{2} + \dfrac{3}{2}m_3} \quad (\text{м/с}^2).$$

Пример 3.4 [9]

Платформа 1 массы m_1 скатывается по наклонной плоскости с углом при основании α. По платформе скользит призма 2, имеющая массу m_2 (рис. 3.4). Движение происходит под действием веса тел G_1 и G_2. Коэффициент трения на контакте призмы и платформы - f. Платформа начинает движение из точки O_1, призма - из точки O_2.. Описать движение системы (рис.3.4) с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

Система имеет две степени свободы и, соответственно, две обобщенные координаты: $q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2$. Составляем два уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2. \qquad (3.25)$$

Здесь $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ - обобщенные скорости .

Кинетическая энергия системы: $T = T_1 + T_2$, где $T_1 = m_1\dot{x}_1^2/2$ - кинетическая энергия платформы 1; $T_2 = m_2 V_c^2/2$ - кинетическая энергия призмы 2, причем $V_c = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$ - абсолютная скорость центра масс призмы, совершающей сложное движение: вместе с платформой 1 и относительно этой платформы [2]. Таким образом, $T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2)$. Суммарная кинетическая энергия :

$$T = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2). \qquad (3.26)$$

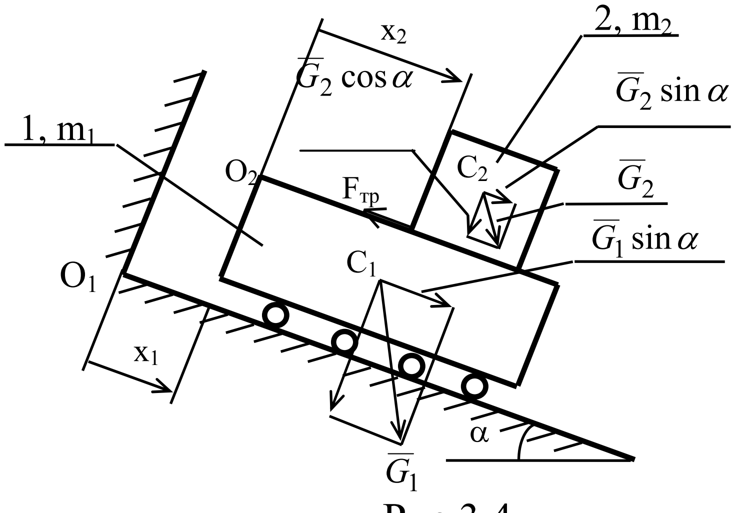


Рис.3.4

Находим производные выражения (3.26), необходимые для подстановки в уравнения (3.25):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2; \qquad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \ ; \qquad (3.27)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2; \qquad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0. \tag{3.28}$$

Находим обобщенные силы, соответствующие каждой из обобщенных координат.

1) Дадим платформе 1 возможное перемещение δx_1, считая при этом, что призма ***относительно*** платформы не скользит, а только движется ***совместно*** с ней, как единое целое. Элементарную работу на данном возможном перемещении производят скатывающие силы $G_1 \sin\alpha = m_1 g \sin\alpha$ и $G_2 \sin\alpha = m_2 g \sin\alpha$, параллельные наклонной плоскости:

$$\sum_{k=1}^{2} \delta A_k = \delta x_1 (m_1 + m_2) g \sin\alpha.$$

В соответствии с определением обобщенной силы, которая представляет собой коэффициент при вариации обобщенной координаты,

$$Q_1 = (m_1 + m_2) g \sin\alpha. \tag{3.29}$$

2) Дадим призме 2 возможное перемещение δx_2 при неподвижной платформе 1. Элементарную работу на этом возможном перемещении производят скатывающая сила призмы $G_2 \sin\alpha = m_2 g \sin\alpha$ и сила трения $F_{\text{тр}} = fG_2 \cos\alpha = fm_2 g \cos\alpha$, направленная против движения. Сумма элементарных работ этих сил:

$$\sum_{k=1}^{2} \delta A_k = \delta x_2 m_2 g (\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Обобщённая сила, соответствующая возможному перемещению δx_2:

$$Q_2 = m_2 g (\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{3.30}$$

Подставим в уравнения (3.25) полученные зависимости (3.27) - (3.30) и получим уравнения движения заданной системы:

$$\left.\begin{aligned} &(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = g(m_1 + m_2)\sin\alpha; \\ &m_2\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = g m_2 (\sin\alpha - f\cos\alpha). \end{aligned}\right\}$$

В заключение отметим, что особенно эффективны уравнения Лагранжа второго рода при описании движения сложных динамических систем, включающих в себя различные упругие элементы и испытывающих воздействие разнообразных нагрузок, в том числе изменяющихся по какому-либо периодическому закону. В большинстве случаев движение таких систем имеет характер ***колебаний***, рассмотрению которых посвящена следующая глава настоящего пособия.

Глава 4. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1. Общие определения и условия устойчивости системы

Колебания - это такое движением механической системы, при котором все обобщенные координаты или часть из них изменяются не монотонно, а по какому-либо периодическому закону и, по крайней мере, несколько раз проходят через нуль.

Для возникновения механических колебаний необходимо наличие потенциальных полей сил тяжести и упругости, весьма распространенных в земных условиях, поэтому, по словам академика Папалекси, среди процессов, как свободно протекающих в природе, так и используемых в технике, «колебания занимают во многих отношениях выдающееся, часто первенствующее место».

Николай Дмитриевич Папалекси (1880-1974) - основатель школы радиофизиков и радиотехников в нашей стране, специалист в области электрических колебаний, автор основополагающих исследований в области нелинейных колебаний.

Колебания в технике создают угрозу прочности конструкций и являются причиной многих аварий и катастроф. Они могут также нарушать нормальные условия эксплуатации оборудования, вызывая нежелательные вибрации корпусных элементов, рабочего инструмента, стрелок приборов. Наконец, колебания могут оказывать вредное физиологическое воздействие на организм человека. В то же время имеются примеры использования колебаний в некоторых специфических технологических процессах, например, при вибропогружении свай, транспортировании и сортировке различного рода продукции.

Наибольшее значение на практике имеют ***малые колебания механических систем***, при которых соответствующие обобщенные координаты и их производные имеют высокий порядок малости. Это позволяет описывать процессы колебаний приближенными уравнениями, а при использовании рядов функций вводить в рассмотрение только первые члены разложения.

В теории колебаний существенно важным является вопрос об устойчивости положения равновесия системы.

Положение равновесия считается устойчивым, ***если при колебаниях обобщенные координаты и скорости точек этой системы будут оставаться малыми по модулю величинами***, то есть система будет совершать движение вблизи своего равновесного состояния.

При неустойчивом равновесии параметры, характеризующие положение и движение точек, увеличиваются, и система все больше удаляется от положения равновесия.

Определим необходимые и достаточные условия устойчивости положения равновесия. При равновесии системы сумма всех приложенных к ней сил, а следовательно, и обобщенная сила равна нулю: Q = 0. Как указывалось в разделе 3.2, обобщенная сила в консервативном поле равна взятой со знаком минус производной потенциальной энергии по обобщенной координате, поэтому в положении равновесия справедлива зависимость:

$$\Pi' = (\partial \Pi / \partial q)_o = 0 \ . \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) дает ***необходимое условие устойчивости*** положения равновесия системы. ***Достаточное условие устойчивости*** определяется теоремой Лагранжа-Дирихле [5]: если в положении равновесия консервативной системы с идеальными стационарными связями ее потенциальная энергия минимальна, то рассматриваемое положение равновесия устойчиво. Для системы с одной степенью свободы это условие имеет вид:

$$\Pi''(0) > 0, \text{ или } (\partial^2 \Pi / \partial q^2)_0 > 0. \tag{4.2}$$

4.2. Колебания систем с одной степенью свободы

Дифференциальное уравнение свободных колебаний системы

Расчетные зависимости для колебаний системы с одной степенью свободы могут быть получены из уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial \Pi}{\partial q}=0. \qquad (4.3)$$

Однако при составлении уравнения движения нужно учесть, что кинетическую и потенциальную энергию следует находить для всех элементов системы, поэтому окончательный вид уравнения должен включать в себя некоторые обобщенные характеристики рассматриваемого материального объекта.

Пусть систему составляют *n* точек, каждая из которых имеет массу m_k и скорость V_k. Радиус-вектор любой из этих точек - r_k.

Кинетическая энергия системы - $T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2$.

Запишем скорость какой-либо точки в векторной форме:

$$V_k = dr_k / dt.$$

Как было показано в разделе 1.1, радиус-вектор точки является функцией обобщенных координат и времени, поэтому можно записать:

$$\frac{dr_k}{dt}=\frac{\partial r_k}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial r_k}{\partial t}\frac{dt}{dt}.$$

При стационарных связях $\partial r_k / dt = 0$, поэтому кинетическую энергию можно выразить следующим образом:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\right)^2 \dot{q}^2=\frac{1}{2}\dot{q}^2\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\right)^2.$$

Обозначим: $\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\frac{\partial r_k}{\partial q}\right)^2 = A(q)$.

Функция *A(q)*зависит как от массы всех точек системы, так и от их расположения в пространстве. Разложим эту функцию в ряд Маклорена в окрестностях значения $q=0$:

$$A(q) = A(0) + A'(0)q + \frac{A''(0)}{2}q^2 + \ . \ . \ . \tag{4.4}$$

В случае малых колебаний в разложении (4.4) можно сохранить один первый член, обозначив его через $\boldsymbol{a}$, тогда

$$T = a\dot{q}^2 \big/ 2 \ . \tag{4.5}$$

Коэффициент $\boldsymbol{a}$ в выражении кинетической энергии (4.5) представляет собой ***обобщенную массу системы***, или ее ***инерционный коэффициент***: $a = 2T \big/ \dot{q}^2$.

Размерность инерционного коэффициента зависит от обобщенной скорости: при поступательном движении инерционный коэффициент имеет размерность массы, при вращательном движении - размерность момента инерции. Понятие обобщенной массы было дано также в примере 3.1.

Потенциальная энергия механической системы, как было показано в разделе 3.1, является функцией обобщенных координат: $\Pi = \Pi(q)$. Разложение этой функции в ряд Маклорена вблизи положения равновесия по обобщенной координате дает:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \Pi'(0)q + \Pi''(0)q^2 \big/ 2 + ... \tag{4.6}$$

Предположим, что в положении равновесия $\Pi(0)=0$. Первая производная потенциальной энергии по обобщенной координате, представляющая собой обобщенную силу, вблизи положения равновесия также нуль: $\Pi'(0) = \partial\Pi \big/ \partial q = 0$.

Таким образом, в случае малых колебаний при малых отклонениях от положения равновесия в разложении (4.6) сохранится только третий член, куда в качестве сомножителя входит вторая производная потенциальной энергии по обобщенной координате. Обозначим эту производную литерой $\boldsymbol{c}$ (малая):

$$\Pi''(0) = \partial^2 \Pi \big/ \partial q^2 = c \ . \tag{4.7}$$

Величина $\boldsymbol{c}$ называется ***обобщённым коэффициентом жёсткости***, или ***квазиупругим коэффициентом***.

В соответствии с теоремой Лагранжа-Дирихле (4.2) положение равновесия при колебаниях будет устойчивым, если квазиупругий коэффициент больше нуля: c>0. Если $c< 0$, имеем неустойчивое равновесие.

Итак, при малых колебаниях потенциальная энергия системы определяется выражением:

$$П = cq^2 \big/ 2 \; . \tag{4.8}$$

Необходимые для подстановки в уравнение Лагранжа второго рода производные найдем из выражений (4.5) и (4.8):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = a\ddot{q} \;; \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = 0 \;; \qquad \frac{\partial П}{\partial q} = cq .$$

После подстановки этих производных в уравнение (4.3) получим:

$$a\ddot{q} + cq = 0 . \tag{4.9}$$

Разделим члены уравнения (4.9) на коэффициент a и обозначим $c/a=k^2$. Окончательно имеем:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0 . \tag{4.10}$$

Здесь k - круговая частота колебаний.

Уравнения (4.9) и (4.10) носят название ***дифференциальных уравнений свободных колебаний***, так как они описывают процессы, происходящие под действием только инерционных и упругих характеристик системы без приложения каких-либо внешних сил.

Жесткость упругого элемента и обобщенный коэффициент жесткости. Эквивалентная жесткость

Квазиупругий коэффициент является обобщенной характеристикой жесткостей всех упругих элементов механической системы. При этом ***жесткостью, или, точнее, удельной жесткостью конкретного упругого элемента называют отношение силы (момента) к соответствующей деформации***.

Этот параметр обозначается большой буквой *C,* дополненной подстрочным индексом - порядковым номером данного упругого элемента в рассматриваемой системе. Так, если винтовая цилиндрическая пружина сожмется (или растянется) на величину x под действием силы F, то жёсткость пружины можно определить выражением $C_k = F/x$. Жесткость упругого валика при закручивании его моментом M на угол φ равна $C_k = M/\varphi$.

Покажем на примере, как определяются инерционный коэффициент ***a*** и квазиупругий коэффициент ***c*** при колебаниях системы с одной степенью свободы.

Пример 4.1 [10]

Зубчатая рейка массой m_1 поворачивает колесо массой m_2 и радиуса r, растягивая при этом пружину жесткостью C_1, а также пружину жесткостью C_2, закрепленную на конце рычага длиной L (рис.4.1). Найти обобщенную массу и обобщенный коэффициент жесткости системы.

Примем за обобщенную координату перемещение зубчатой рейки x. При смещении рейки на величину x деформация пружины жесткостью C_1 также составит x, а зубчатое колесо повернется на угол $\varphi = x/r$. Рычаг OA при этом растянет (или сожмет) пружину жесткостью C_2 на величину $s = Lx/r$.

Кинетическая энергия системы: $T = m_1\dot{x}^2/2 + I_o\dot{\varphi}^2/2$. Учитывая, что момент инерции колеса $I_o = m_2 r^2/2$, а угловая его скорость $\dot{\varphi} = \dot{x}/r$, кинетическую энергию системы можно выразить формулой:

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\dot{x}^2. \qquad (4.11)$$

Выражение, стоящее в скобках уравнения (4.11), - инерционный коэффициент (обобщенная масса) системы:

$$a = m_1 + m_2/2.$$

Потенциальная энергия системы определяется деформациями пружин:

$$\Pi = \frac{1}{2}C_1x^2 + \frac{1}{2}C_2\left(\frac{L}{r}x\right)^2 = \frac{1}{2}\left(C_1 + \frac{L^2}{r^2}C_2\right)x^2. \qquad (4.12)$$

Выражение, стоящее в скобках уравнения (4.12), это квазиупругий коэффициент данной системы:

$$c = C_1 + \frac{L^2}{r^2}C_2 .$$

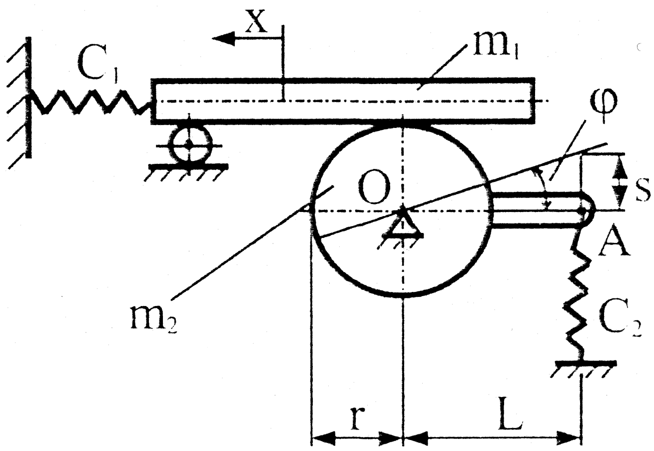


Рис.4.1

Отметим, что обобщенный коэффициент жесткости можно было бы получить в соответствии с выражением (4.7), дважды продифференцировав выражение (4.12).

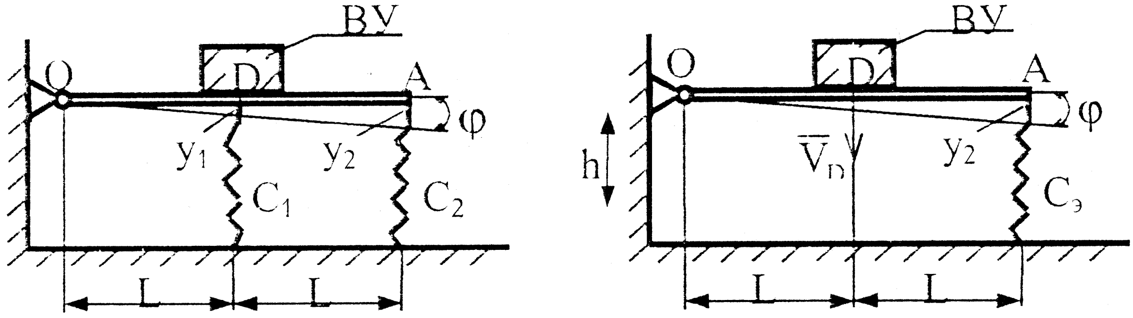
В практических задачах может возникнуть необходимость определения ***эквивалентной жесткости*** - жесткости некоторого условного ***звена приведения***, которым можно заменить все упругие элементы системы. Эквивалентная жесткость находится из уравнения потенциальной энергии системы:

$$\Pi_Э = \sum \Pi_K . \qquad (4.13)$$

Здесь $\Pi_Э$ – потенциальная энергия звена приведения, Π_K – потенциальная энергия каждого из упругих звеньев системы.

Пример 4.2

В целях защиты от вибрационных нагрузок вычислительное устройство (ВУ) закреплено на подпружиненной плате *OA*. Для упрощения расчетов предлагается заменить две пружины, имеющие жесткости C_1 и C_2 (рис. 4.2а), одним упругим элементом эквивалентной жесткости *Cэ* (рис. 4.2 б).



а б

Рис.4.2

Повернем плату ОА на малый угол φ, тогда деформация каждой из пружин на схемах 4.2а и 4.2 б составит, соответственно, $y_1=L\varphi$, $y_2=2L\varphi$.

Потенциальная энергия пружин:

$$П_1= C_1y_1^2/2\ ; \quad П_2= C_2y_2^2/2\ ; \quad П_Э= C_Эy_2^2/2.$$

Выполняя условие (4.13), запишем:

$$C_1L^2\varphi^2/2 + 4C_2L^2\varphi^2/2 = 4C_ЭL^2\varphi^2/2$$

Эквивалентная жесткость пружины

$$C_Э= 0{,}25C_1 + C_2.$$

Решение дифференциального уравнения свободных колебаний системы

Решение уравнения (4.10) известно [8]:

$$q = C_1 sinkt + C_2 coskt\ . \qquad (4.14)$$

Имеем ***гармонические колебания***, при которых обобщенная координата системы q изменяется по синусоидальному закону. График гармонических колебаний показан на рисунке 4.3.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 в уравнении (4.14) можно определить по начальным условиям процесса. Однако параметры колебаний удобнее проявить, если обозначить $C_1 = A\cos\alpha$, $C_2 = A\sin\alpha$.

Подставим эти выражения в уравнение (4.14):

$$q = A\sin kt \cdot \cos\alpha + A\cos kt \cdot \sin\alpha, \quad \text{или}$$

$$q = A\sin(kt + \alpha). \tag{4.15}$$

В уравнение (4.15) входят A - амплитуда и угол α - начальная фаза колебаний (рис. 4.3).

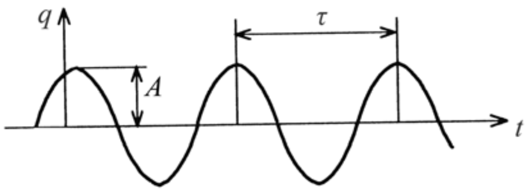


Рис.4.3

Найдем параметры A и α по начальным условиям процесса: при $t = 0$ обобщенная координата - $q = q_0$, обобщенная скорость - $\dot{q} = \dot{q}_0$. Продифференцируем уравнение (4.15):

$$\dot{q} = Ak\cos(kt + \alpha). \tag{4.16}$$

При $t = 0$ уравнения (4.15) и (4.16) будут иметь вид:

$$q_0 = A\sin\alpha, \tag{4.15а}$$

$$\dot{q}_0 / k = A\cos\alpha. \tag{4.16а}$$

Разделив уравнение (4.15а) на уравнение (4.16а), получим:

$$tg\alpha = kq_o / \dot{q}_o, \quad \text{или} \quad \alpha = arctg(kq_o / \dot{q}_o).$$

Возводя в квадрат и складывая те же уравнения (4.15а) и (4.16 а), получим амплитуду колебаний:

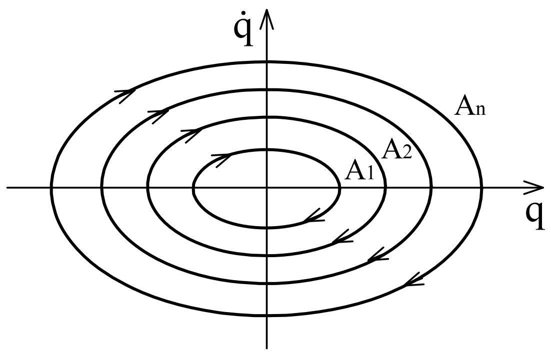
$$A = \sqrt{q_0^2 + \dot{q}_0^2 / k^2}.$$

Напомним еще один известный из курса физики параметр процесса: ***период колебаний*** - $\tau = 2\pi/k$, где k- круговая частота.

Понятие о фазовой плоскости и фазовом портрете системы

При исследовании различного рода колебаний, в том числе и механических, удобно пользоваться так называемой ***фазовой плоскостью***, по оси абсцисс которой откладываются обобщенные координаты q, а по оси ординат - обобщенные скорости $\dot{q}$. Состояние материальной системы в любой момент времени может быть представлено движением изображающей точки M (см. раздел 3.3), координатами которой являются переменные q и $\dot{q}$.

Геометрическое место положений изображающей точки на фазовой плоскости называется ***фазовой траекторией***. Совокупность фазовых траекторий, характеризующих состояние системы при переменных параметрах процесса, представляет собой ***фазовый портрет системы*** (рис. 4.4).



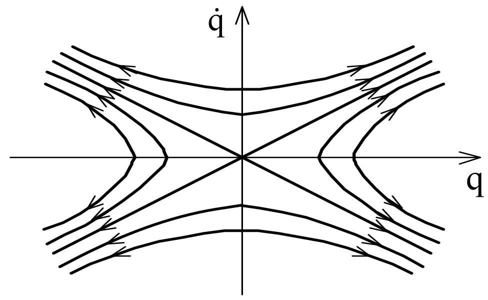


Рис. 4.4

В случае свободных гармонических колебаний фазовую траекторию можно получить, исключив из уравнений (4.15) и (4.16) параметр t - время. В результате получим:

$$q^2 + \dot{q}^2/k^2 = A^2.$$

Очевидно, фазовая траектория представляет собой эллипс. Изменяя параметр A - амплитуду колебаний, получим фазовый портрет системы в виде совокупности соосных эллипсов (рис. 4.4а).

При неустойчивом равновесии системы, как это было отмечено в разделе 4.1, квазиупругий коэффициент $\boldsymbol{c<0}$. Преобразование уравнений (4.15), (4.16) в этом случае приводит к уравнению гиперболы:

$$q^2 - \dot{q}^2/k^2 = A^2.$$

Фазовый портрет системы при неустойчивом положении равновесия (расходящиеся колебания) представляет собой семейство гипербол и четыре полупрямые, которые являются асимптотами этих гипербол (рис. 4.4 б).

Колебания системы при сопротивлении, пропорциональном обобщенной скорости

В том случае, когда колебания происходят в какой-либо вязкой среде, возникает сопротивление движению, пропорциональное первой степени скорости: Q* = - $b\dot{q}$. Здесь Q* - обобщенная сила вязкого трения, b - коэффициент пропорциональности.

При подстановке силы вязкого трения в правую часть уравнения (4.9) получим:

$$a\ddot{q} + cq = -b\dot{q}. \tag{4.17}$$

Перенесем силу сопротивления в левую часть уравнения (4.17), сократим все его члены на a и обозначим $b/a = 2\nu$, $c/a = k^2$, причём параметр k, как это было принято выше,– частота колебаний. Тогда вместо (4.17) получим:

$$\ddot{q} + 2\nu\dot{q} + k^2 q = 0. \tag{4.18}$$

Имеем дифференциальное уравнение свободных колебаний при сопротивлении, пропорциональном первой степени скорости. Чтобы найти значения обобщённых координат q, составим характеристическое уравнение [8]:

$$n^2 + 2\nu n + k^2 = 0. \tag{4.19}$$

Корни этого уравнения:

$$n = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - k^2}.$$

В зависимости от соотношения коэффициентов ν и k возможны два случая решения уравнения (4.18).

1. $\nu < k$ - сопротивление мало по сравнению с упругой силой. В этом случае $n = -\nu \pm i\sqrt{k^2 - \nu^2}$.

Обозначим $k_1 = \sqrt{k^2 - \nu^2}$, тогда $n = -\nu \pm ik_1$ - корни характеристического уравнения комплексные и различные. Решение дифференциального уравнения (4.18) имеет вид:

$$q = e^{-\nu t} A \sin(k_1 t + \alpha). \tag{4.20}$$

Входящий в уравнение (4.20) множитель $e^{-\nu t}$ носит название ***декремента колебаний***, и его наличие приводит к уменьшению обобщенной координаты q, то есть к затуханию процесса. График затухающих колебаний показан на рисунке 4.5а.

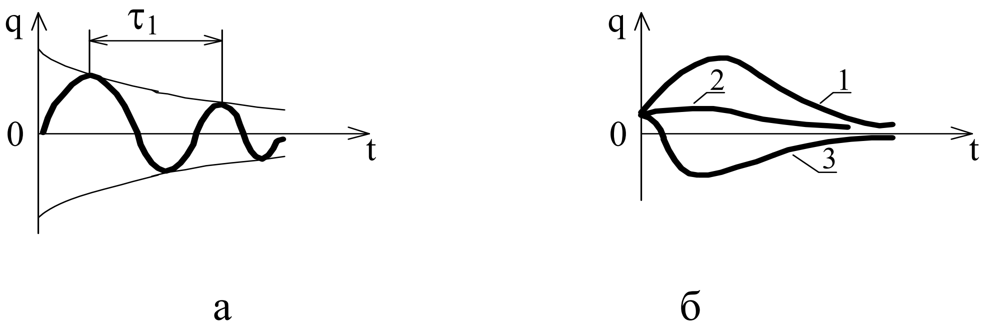


Рис. 4.5

Особенностью затухающих колебаний, помимо уменьшения размаха колебаний, является также некоторое уменьшение частоты: $k_1 < k$ - и соответственное увеличение периода:

$$\tau_1 = 2\pi / k_1 > \tau .$$

2. $\nu > k$ - сопротивление велико по сравнению с упругой силой.

Если обозначить $\nu^2 - k^2 = r^2$, где r - некоторое действительное число, то $n = \nu \pm r$ - корни характеристического уравнения (4.19) действительные и различные. Решение уравнения (4.18) в этом случае имеет вил:

$$q = C_1 e^{-(\nu - r)t} + C_2 e^{-(\nu + r)t} . \qquad (4.21)$$

Множители $e^{-(\nu - r)t}$ и $e^{-(\nu + r)t}$, входящие в уравнение (4.21), со временем монотонно убывают, поэтому при большом сопротивлении среды колебания не развиваются, и система под действием упругой силы будет асимптотически приближаться к равновесному положению. График такого движения может быть представлен, например, одной из кривых, показанных на рисунке 4.5 б.

Вынужденные колебания системы под действием гармонических сил

Вынужденными называются колебания, которые возбуждают в системе какие-либо внешние факторы, периодически изменяющиеся во времени.

Наибольшее распространение имеют вынужденные колебания под действием гармонических сил, меняющихся во времени по синусоидальному закону: $Q = H \sin \omega t$, где H - амплитуда силы, ω - ее частота.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при силовом возбуждении можно получить, подставив в правую часть уравнения (4.9) гармоническую силу:

$$a\ddot{q} + cq = H\sin\omega t. \tag{4.22}$$

Разделим все члены уравнения (4.22) на коэффициент a и учтем введенное выше обозначение частоты колебаний:

$$\ddot{q} + k^2 q = H\sin\omega t/a. \tag{4.23}$$

Заметим, что методы гармонического анализа [8] позволяют представить любую периодическую функцию как совокупность некоторого числа гармоник и свести, таким образом, задачу о вынужденных колебаниях под действием периодической силы любого вида к выражениям, подобным (4.23).

Решением уравнения (4.23) будет сумма $q = q_1 + q_2$, где q_1 - общее решение этого уравнения без правой части, определяемое равенством (4.15); q_2 - какое-нибудь частное решение. Предполагая, что вынуждающая сила навязывает системе свою частоту колебаний, будем искать частное решение в виде

$$q_2 = B\sin\omega t.$$

Подставим в уравнение (4.23) значение q_2 и соответствующую производную $\ddot{q}_2 = -\omega^2 B\sin\omega t$:

$$-B\omega^2\sin\omega t + Bk^2\sin\omega t = H\sin\omega t/a.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при $\sin\omega t$, получим уравнение амплитуды вынужденных колебаний:

$$B = \frac{H}{a(k^2 - \omega^2)}. \tag{4.24}$$

Полное решение уравнения (4.23):

$$q = A\sin(kt + \alpha) + B\sin\omega t. \tag{4.25}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (4.25), совпадающее с уравнением свободных колебаний (4.15), при наличии вынуждающей силы носит название ***собственных колебаний***. Эта составляющая процесса рано или поздно затухает из-за неизбежно возникающих сопротивлений того или иного рода. Здесь k - частота собственных колебаний системы.

Второе слагаемое - ***вынужденные колебания*** с амплитудой

B и частотой ω, равной частоте возмущающей силы. Вынужденные колебания будут иметь место до тех пор, пока действует возбуждающий колебания фактор.

Преобразуем далее выражение амплитуды вынужденных колебаний. Разделим числитель и знаменатель выражения (4.24) на k^2 и заменим произведение квадрата частоты и инерционного коэффициента a обобщенным коэффициентом жесткости: $ak^2 = c$. В результате получим:

$$B = \frac{H}{ak^2\left(1-\omega^2/k^2\right)} = \frac{H}{c} \cdot \frac{1}{1-\omega^2/k^2} . \qquad (4.26)$$

Отношение амплитуды вынуждающей силы H к жесткости c представляет собой ***статическое смещение*** q_{cm} - отклонение системы от положения равновесия под действием амплитуды вынуждающей силы: $q_{cm} = H/c$. Другой множитель произведения (4.26) носит название ***коэффициента динамичности*** $К_Д$:

$$К_Д = \frac{1}{1-\omega^2/k^2} . \qquad (4.27)$$

Коэффициент динамичности показывает, во сколько раз амплитуда колебаний больше статического смещения:

$$К_Д = B/q_{cm} .$$

Построим график изменения коэффициента динамичности в зависимости от частоты вынуждающей силы ω: отложим по оси абсцисс отношение частот ω/k, по оси ординат - определяемые по формуле (4.27) значения $К_Д$ (рис.4.6а).

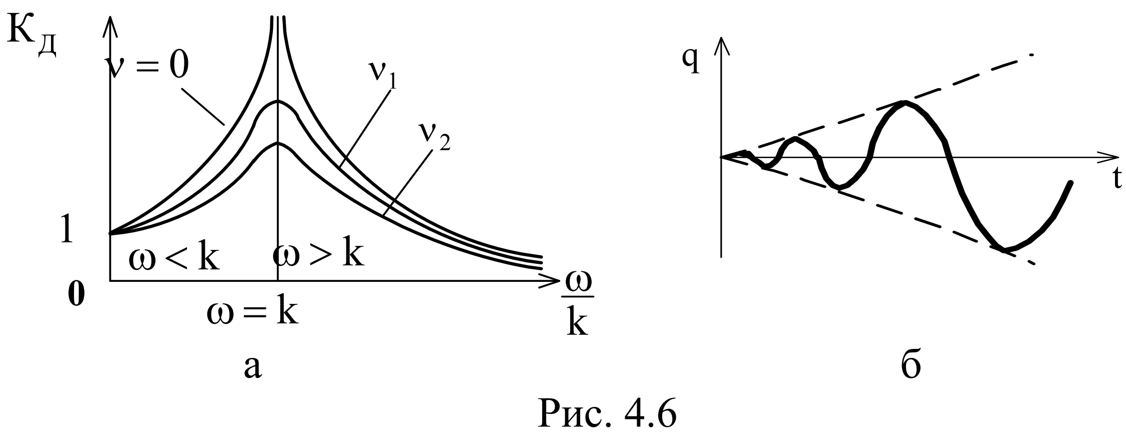


Рис. 4.6

Начало этого графика имеем в точке (0; 1), где $\omega=0$ и $K_Д = 1$. Далее по мере увеличения частоты ω в той части графика, где $\omega < k$, знаменатель выражения (4.27) уменьшается, а коэффициент динамичности увеличивается - имеем ***дорезонансную область колебаний***.

При $\omega=k$, как это следует из формулы (4.27), амплитуды вынужденных колебаний и коэффициент динамичности неограниченно возрастают - наступает ***резонанс колебаний***. Можно показать [2], что при резонансе фаза колебаний изменяется на $\pi/2$, а размах амплитуд увеличивается пропорционально времени (рис. 4.6 б). Для механических систем совпадение частот вынужденных и собственных колебаний представляет, как правило, серьезную опасность, так как ведет к разрушению конструкций.

Зарезонансная область процесса колебаний характеризуется тем, что частота ω становится больше частоты k, а коэффициент динамичности уменьшается (рис 4.6а).

Рассмотрим как влияет на процесс вынужденных колебаний вязкое сопротивление. Подставим в правую часть уравнения (4.22) силу вязкого сопротивления $Q^* = -b\dot{q}$. После соответствующего преобразования коэффициентов можно получить дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости:

$$\ddot{q} + 2\nu\dot{q} + k^2 q = H\sin\omega t/a\,. \tag{4.28}$$

Решение уравнения (4.28) ищем в виде суммы $q = q_1 + q_2$, где q_1 - общее решение этого уравнения без правой части, то есть найденное нами выше выражение для затухающих колебаний (4.20). q_2 - некоторое частное решение, которое будем искать в виде $q_2 = B\sin(\omega t - \beta)$, предполагая, что в вязкой среде вынужденные колебания будут происходить с частотой ω, но отставать по фазе от вынуждающей силы на некоторый угол β. Таким образом, полное решение дифференциального уравнения (4.28) будет иметь вид:

$$q = e^{-\nu t} A\sin(kt + \alpha) + B\sin(\omega t - \beta)\,. \tag{4.29}$$

Собственные колебания системы - первое слагаемое в правой части уравнения (4.29) - с течением времени затухают. Вынужденные колебания описываются вторым слагаемым и являются стационарными и незатухающими. Амплитуда вынужденных колебаний при наличии сопротивления определяется выражением [2]:

$$B = \frac{H}{ak^2\sqrt{\left(1-\omega^2/k^2\right)^2 + 4\nu^2\omega^2/k^2}} \ . \qquad (4.30)$$

Очевидно, ***при наличии вязкого сопротивления безграничного возрастания амплитуд в режиме резонанса происходить не будет*****:** когда частоты собственных и вынужденных колебаний становятся равными: $\omega = k$, - то, как следует из формулы (4.30), амплитуда вынужденных колебаний будет определяться выражением:

$$B = H/2\nu c = q_{cm}/2\nu \, .$$

Чем больше сопротивление, тем меньше амплитуды колебаний и тем больше сглажен резонанс. На рисунке 4.6а показаны графики изменения коэффициентов динамичности при различных показателях сопротивления: $\mathbf{v}_1 < \nu_2 < ... < \nu_n$.

Вынужденные колебания системы при кинематическом возбуждении

Вынужденные колебания могут возникать в механической системе не только под действием гармонических сил, но и под влиянием кинематических факторов, периодически изменяющихся во времени, например, под действием внешней вибрации, воспринимаемой точками системы.

Рассмотрим еще раз систему установки вычислительного устройства (ВУ) на плате с амортизирующей пружиной эквивалентной жесткости $C_Э$ (рис. 4.2 б). На корпус объекта, где установлено вычислительное устройство, действует внешняя вибрация, закон изменения которой: $h = H\sin\omega t$. Здесь H - амплитуда вибрации, ω - ее частота.

Составим для данного случая уравнение Лагранжа второго рода, приняв за обобщенную координату угол поворота платы φ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \ . \tag{4.31}$$

Кинетическая энергия системы, учитывая, что ВУ установлено в центре масс платы - точке *D*, составляет $T = I_o \omega^2 / 2$.

Здесь I_O - момент инерции ВУ и платы при их совместном повороте вокруг точки *O*. Считая, что вся масса системы сосредоточена в точке *D*, имеем $I_o = mL^2$. Угловая скорость $\omega = V_D / L$, где V_D - скорость центра масс системы. Если в данный момент времени скорость поворота ВУ и скорость вибрации $\dot{h}$ сонаправлены, то $V_D = L\dot{\varphi} + \dot{h}$, а также $\omega = (L\,\dot{\varphi} + \dot{h})/L$. После соответствующих подстановок и преобразований кинетическая энергия системы будет иметь вид:

$$T = \frac{m}{2}(L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\,\dot{\varphi}\dot{h} + \dot{h}^2).$$

Находим производные кинетической энергии по обобщённой координате φ, обобщённой скорости $\dot{\varphi}$ и по времени *t:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = mL(L\,\ddot{\varphi} + \ddot{h})\,; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Потенциальную энергию системы найдем, считая для простоты $C_Э = C$. Имеем: $\Pi = -mgL\varphi + 4CL^2\varphi^2 / 2$.

Производная потенциальной энергии по координате φ:

$$\partial \Pi / \partial \varphi = -mgL + 4CL^2\varphi \ .$$

Будем считать также, что потенциальная энергия пружины существенно больше потенциальной энергии ВУ (условие линейности колебаний). Тогда $\partial \Pi / \partial \varphi = 4CL^2\varphi$.

Подставляем производные кинетической и потенциальной энергии в уравнение (4.31), сокращаем все его члены на mL^2 и переносим в правую часть уравнения ускорение вибрации $\ddot{h} = -H\omega^2 \sin \omega t$. После всех указанных преобразований получаем уравнение вынужденных колебаний под действием вибрации:

$$\ddot{\varphi} + \frac{4C}{m}\varphi = \frac{H}{L}\omega^2 \sin\omega t.$$

Или, окончательно, обозначив $4C/m = k^2$, $H\omega^2/L = B$:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = B\sin\omega t.$$

Полученное уравнение формально совпадает с уравнением вынужденных колебаний под действием гармонической силы (4.23).

4.3. Колебания систем со многими степенями свободы

Уравнения процесса колебаний

Составление и решение уравнений колебаний для системы с несколькими степенями свободы в принципе производится так же, как для системы с одной степенью свободы, однако при многих степенях свободы имеется ряд существенных особенностей и специфических трудностей.

Математическое описание процесса колебаний сделаем с помощью уравнений Лагранжа второго рода, причем число этих уравнений должно соответствовать количеству степеней свободы механической системы *W*, а, следовательно, числу обобщённых координат s. Таким образом, для системы со многими степенями свободы следует составлять s уравнений вида:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0\ ; \qquad (i = 1, 2, \ldots s). \tag{4.32}$$

Кинетическая энергия, входящая в уравнения (4.32), является функцией всех обобщенных скоростей системы, а потенциальная энергия - функцией всех обобщенных координат, отсчитываемых от положения устойчивого равновесия. Вблизи этого положения при малых колебаниях системы обобщенные координаты и скорости малы, поэтому получить сложные функции *T* и *П* можно по аналогии с методикой, изложенной в разделе 4.2. Здесь мы приведем только окончательные результаты вычисления кинетической и потенциальной энергии системы в виде так называемых ***квадратичных форм*** - сверток однородных многочленов второй степени при переменных q и $\dot{q}$ [5]:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} c_{ij}q_i q_j. \tag{4.33}$$

Входящие в формулы (4.33)) множители a_{ij} - это инерционные коэффициенты (обобщенные массы системы). Множители c_{ij} - квазиупругие коэффициенты (обобщенные коэффициенты жесткости).

Подстановка в уравнения (4.32) соответствующих производных кинетической и потенциальной энергии приводит к системе линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами a_{ij} и c_{ij}, причем первый из нижних индексов при этих коэффициентах - i соответствует порядковому номеру обобщенной координаты; индекс j соответствует порядковому номеру уравнения колебаний.

Ниже приводится общий вид уравнений, описывающих колебания механической системы со многими степенями свободы: $W = s$, причём $i= 1, 2, \ldots s$, а также $j = 1, 2, \ldots s$.

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{1s}\ddot{q}_s + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \ldots + c_{1s}q_s = 0;\\
&a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{2s}\ddot{q}_s + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \ldots + c_{2s}q_s = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{s1}\ddot{q}_1 + a_{s2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{ss}\ddot{q}_s + c_{s1}q_1 + c_{s2}q_2 + \ldots + c_{ss}q_s = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

Покажем, как составить уравнения колебаний для конкретной системы с несколькими степенями свободы.

Пример 4.4

Составить уравнение колебаний грузов массами m_1 и m_2, связанных между собой и с неподвижным корпусом пружинами, жесткости которых C_1 и C_2 (рис. 4.7а).

Примем за обобщенные координаты горизонтальные перемещения грузов x_1 и x_2. Эти перемещения будем отсчитывать от некоторого равновесного состояния, при котором пружины недеформированы. Так как система имеет ***две степени свободы***, то следует составить два уравнения Лагранжа второго рода:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.35)$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = m_1\dot{x}_1^2/2 + m_2\dot{x}_2^2/2.$$

Производные кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0. \qquad (4.36)$$

Потенциальная энергия системы: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$, где Π_1 и Π_2 - потенциальная энергия каждой из пружин. Учтем, что в процессе движения пружина жесткостью C_1 удлиняется на величину $\Delta l_1 = x_1$, а пружина жесткостью C_2 получает деформацию, равную $\Delta l_2 = x_2 - x_1$. Таким образом, $\Pi_1 = C_1 x_1^2/2$, а также $\Pi_2 = C_2(x_2 - x_1)^2/2$. Суммарно:

$$\Pi = C_1 x_1^2/2 + C_2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)/2.$$

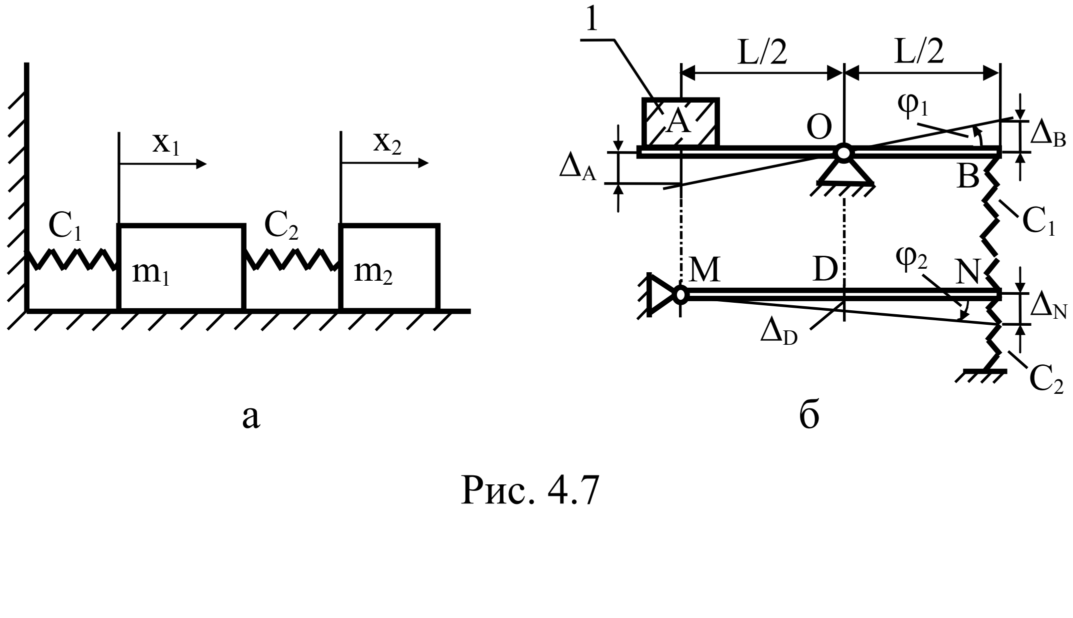


Рис. 4.7

Производные потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\partial \Pi / \partial x_1 = (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2, \quad \partial \Pi / \partial x_2 = C_2 x_2 - C_2 x_1. \qquad (4.37)$$

Подставим в уравнения (4.35) вычисленные по уравнениям (4.36), (4.37) производные кинетической и потенциальной энергии. Уравнения колебаний заданной системы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} & m_1\ddot{x}_1 + (C_1 + C_2)x_1 - C_2 x_2 = 0; \\ & m_2\ddot{x}_2 - C_2 x_1 + C_2 x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.38)$$

В то же время система уравнений (4.34) при двух степенях свободы имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 = 0; \\ & a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.39)$$

Сопоставим коэффициенты при обобщенных координатах и их вторых производных в уравнениях (4.38), (4.39). Здесь инерционные коэффициенты: $a_{11} = m_1$; $a_{22} = m_2$; $a_{12} = a_{21} = 0$.

Обобщенные (квазиупругие) коэффициенты жесткости:

$$c_{11} = C_1 + C_2; \; c_{22} = C_2; \; c_{12} = c_{21} = -C_2. \qquad (4.40)$$

Те же значения квазиупругих коэффициентов можно получить при повторном дифференцировании выражений (4.37):

$$c_{11} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2} = C_1 + C_2; \quad c_{22} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} = C_2; \quad c_{12} = c_{21} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2} = -C_2.$$

Пример 4.5

Составить уравнения колебаний механизма виброзащиты блока радиоэлектронной аппаратуры (РЭА), состоящего из двух подпружиненных плат *AB* и *MN* (рис.4.7 б). Блок 1 массы m_1 установлен на конце платы *AB*, масса которой на порядок меньше массы аппаратуры. Масса платы *MN* - m_2 - равномерно распределена по её длине. Известно, что длина каждой из плат L, жесткости пружин - C_1 и C_2.

Система имеет две степени свободы. Примем за обобщенные координаты углы поворота установочных плат: $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$ - и составим два уравнения Лагранжа второго рода:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = 0; \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.41)$$

Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2$, где $T_1 = I_1\dot{\varphi}_1^2/2$ - кинетическая энергия блока 1 (массой платы *AB* пренебрегаем); $T_2 = I_2\dot{\varphi}_2^2/2$ - кинетическая энергия платы *MN* с распределённой массой.

Учитывая, что радиус поворота блока РЭА вокруг точки *O* составляет $L/2$, получим: $I_1 = m_1(L/2)^2$. Момент инерции платы *MN* при её повороте вокруг точки *M* составляет $I_2 = m_2L^2/3$ (см. раздел 2.3). $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ - обобщенные скорости объектов, составляющих систему. После соответствующих подстановок имеем:

$$T = \frac{m_1L^2}{8}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2L^2}{6}\dot{\varphi}_2^2.$$

Производные кинетической энергии по обобщенным скоростям, времени и координатам:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{1}{4}m_1L^2\ddot{\varphi}_1^2; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = \frac{1}{3}m_2L^2\ddot{\varphi}_2^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0. \qquad (4.42)$$

Потенциальная энергия системы: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4$, где $\Pi_1 = -m_1gL\varphi_1/2$ - потенциальная энергия блока 1 при его перемещении из некоторого начального положения на величину $\Delta_A = L\,\varphi_1/2$, соответствующей малому углу φ_1.

$\Pi_2 = m_2gL\varphi_2/2$ - потенциальная энергия платы MN при опускании центра ее тяжести точки *D* на величину $\Delta_D = L\,\varphi_2/2$, соответствующую малому углу φ_2.

$П_3 = C_1\Delta_B^2/2$ - потенциальная энергия деформации пружины жесткостью C_1. Учтем, что в соответствии с рис.4.7 б при повороте платы AB на малый угол φ_1 эта пружина растягивается на величину $\Delta_{B1} = L\varphi_1/2$, а при повороте платы MN на угол φ_2 - на величину $\Delta_{B2} = L\varphi_2$. Таким образом, общая деформация пружины:

$$\Delta_B = \Delta_{B1} + \Delta_{B2} = L\varphi_1/2 + L\varphi_2 = L(\varphi_1 + 2\varphi_2)/2.$$

Потенциальная энергия пружины:

$$П_3 = C_1L^2(\varphi_1^2 + 4\varphi_1\varphi_2 + 4\varphi_2^2)/8.$$

$П_4$ - потенциальная энергия деформации пружины жесткостью C_2. При повороте платы MN на малый угол φ_2 эта пружина деформируется на величину $\Delta_N = L\varphi_2$. Отсюда $П_4 = C_2L^2\varphi_2^2/2$.

Суммарная потенциальная энергия системы:

$$П = -\frac{1}{2}m_1gL\varphi_1 - \frac{1}{2}m_2gL\varphi_2 + \frac{C_1L^2}{8}(\varphi_1^2 + 4\varphi_1\varphi_2 + 4\varphi_2^2) + \frac{C_2L^2}{2}\varphi_2^2.$$

Производные потенциальной энергии по обобщенным координатам:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial П/\partial\varphi_1 = -m_1gL/2 + C_1L^2\varphi_1/4 + C_1L^2\varphi_2/2;\\
&\partial П/\partial\varphi_2 = -m_2gL/2 + C_1L^2\varphi_1/2 + C_1L^2\varphi_2 + C_2L^2\varphi_2.
\end{aligned}\right\} \quad (4.43)$$

Подставим в уравнения (4.41) значения производных из выражений (4.42), (4.43) и, сокращая на L^2, получим уравнения колебаний:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{4}m_1\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{4}C_1\varphi_1 + \frac{1}{2}C_1\varphi_2 = \frac{m_1g}{2L};\\
&\frac{1}{3}m_2\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}C_1\varphi_1 + (C_1 + C_2)\varphi_2 = \frac{m_2g}{2L}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.44)$$

Квазиупругие коэффициенты в данном случае очевидны из уравнений (4.44), а также могут быть получены при повторном дифференцировании уравнений (4.43):

$$c_{11} = \partial^2 \Pi \big/ \partial \varphi_1^2 = C_1/4; \quad c_{22} = \partial^2 \Pi \big/ \partial \varphi_2^2 = C_1 + C_2;$$

$$c_{12} = c_{21} = \partial^2 \Pi \big/ \partial \varphi_1 \partial \varphi_2 = C_1/2\,.$$

Устойчивость равновесия системы со многими степенями свободы

Как было показано в разделе 4.1, равновесие механической системы при колебаниях будет устойчивым, если вторая производная потенциальной энергии - квазиупругий коэффициент будет положительным: $c > 0$.

При многих степенях свободы критерий устойчивости равновесия системы определяется известной из математики теоремой Сильвестра [8]: ***квадратичная форма потенциальной энергии системы (4.33) должна быть положительна, что возможно в том случае, когда все главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы положительны***.

Как известно [8], матрица квадратичной формы имеет вид :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1S} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{S1} & c_{S2} & \cdots & c_{SS} \end{vmatrix}.$$

В частности, для системы с двумя степенями свободы:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}. \tag{4.45}$$

Пример 4.6

Проверить устойчивость колебаний механических систем, показанных на рис. 4.7а, б при заданных в примерах 4.4 и 4.5 параметрах.

При расчете системы, показанной на рисунке 4.7а, получены обобщенные коэффициенты жесткости:

$$c_{11} = C_1 + C_2; \quad c_{22} = C_2; \quad c_{12} = c_{21} = -C_2.$$

Применяем критерий Сильвестра для данного случая:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Раскрываем определитель: $(C_1 + C_2)C_2 - C_2^2 = C_1 C_2$.

Заметим, что $C_1 C_2 > 0$, так как жесткости упругих элементов существенно положительны. Следовательно, $\Delta_2 > 0$, положение равновесия устойчиво, и если данную систему вывести из равновесного состояния, то она будет совершать малые колебания около положения равновесия.

Проверим устойчивость системы, показанной на рисунке 4.7б: подставим в определитель (4.45) полученные в примере 4.5 значения квазиупругих коэффициентов и применим критерий Сильвестра:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1/4 & C_1/2 \\ C_1/2 & C_1 + C_2 \end{vmatrix}.$$

Раскрываем определитель: $C_1^2/4 + C_1 C_2/4 - C_1^2/4 > 0.$

Положение равновесия системы устойчиво, так как $C_1 C_2 > 0$.

Решение систем уравнений, описывающих процесс колебаний

Если условия устойчивости колебаний выполняются, то частные решения системы уравнений (4.34) можно искать в виде

$$q_i = A_i \sin(kt + \alpha).$$

Подставив в исходные уравнения (4.34) значения $q_1, q_2 \ldots q_i \ldots q_s$, вторые производные этих величин и приравняв коэффициенты при $\sin(kt + \alpha)$, получим систему алгебраических уравнений, однородных относительно неизвестных амплитуд $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_s$:

$$\left.\begin{aligned}
&-k^2a_{11}A_1 - k^2a_{12}A_2 - \ldots - k^2a_{1s}A_s + c_{11}A_1 + c_{12}A_2 + \ldots + c_{1s}A_s = 0;\\
&-k^2a_{21}A_1 - k^2a_{22}A_2 - \ldots - k^2a_{2s}A_s + c_{21}A_1 + c_{22}A_2 + \ldots + c_{2s}A_s = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-k^2a_{s1}A_1 - k^2a_{s2}A_2 - \ldots - k^2a_{ss}A_s + c_{s1}A_1 + c_{s2}A_2 + \ldots + c_{ss}A_s = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Эта система уравнений решается по общему правилу [8]: составляется определитель из коэффициентов при неизвестных амплитудах, а затем он приравнивается нулю:

$$\begin{vmatrix}
c_{11} - k^2a_{11} & c_{12} - k^2a_{12} & \ldots & c_{1s} - k^2a_{1s}\\
c_{21} - k^2a_{21} & c_{22} - k^2a_{22} & \ldots & c_{2s} - k^2a_{2s}\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\
c_{s1} - k^2a_{s1} & c_{s2} - k^2a_{s2} & \ldots & c_{ss} - k^2a_{ss}
\end{vmatrix} = 0. \qquad (4.46)$$

Развернув определитель (4.46), можно получить алгебраическое уравнение s-ой степени, называемое ***уравнением частот***. Частотное уравнение для системы с числом степеней свободы, равным s, имеет вид [10]:

$$b_0 - b_1k^2 + b_2k^4 - b_3k^6 + \ldots + (-1)^s b_s k^{2s} = 0. \qquad (4.47)$$

Корни уравнения (4.47): $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_s$ - образуют спектр собственных частот данной системы. Каждому корню соответствует частное решение: $q_i = A_i \sin(k_i t + \alpha_i)$.

Значения амплитуд A_i и углов сдвига фаз α_i определяется по начальным условиям процесса колебаний, когда при $t = 0$ имеем $q_i = q_{io}$ - начальные координаты, $\dot{q}_i = \dot{q}_{0i}$ - начальные скорости процесса *(i =1, 2, . . . s)*.

Проиллюстрируем все вышесказанное для рассмотренного примера 4.4, полагая для простоты, что начальные фазы колебаний равны нулю: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Решение уравнений (4.38) ищем в виде:

$$x_1 = A_1 \sin kt; \quad x_2 = A_2 \sin kt .$$

Вторые производные этих величин:

$$\ddot{x}_1 = -A_1 k^2 \sin kt; \quad \ddot{x}_2 = -A_2 k^2 \sin kt .$$

Подставив в уравнения (4.38) значения x_1, $\ddot{x}_1$, x_2, $\ddot{x}_2$ и приравнивая коэффициенты при $\sin kt$, получим:

$$\left.\begin{aligned} (C_1 + C_2 - m_1 k^2) A_1 - C_2 A_2 = 0; \\ -C_2 A_1 + (C_2 - m_2 k^2) A_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.48)$$

Приравниваем нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных амплитудах уравнений (4.48):

$$\begin{vmatrix} C_1 + C_2 - m_1 k^2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 - m_2 k^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.49)$$

Из (4.49) получим биквадратное уравнение частот:

$$m_1 m_2 k^4 - \left[C_2 m_1 + (C_1 + C_2) m_2 \right] k^2 + C_1 C_2 = 0. \qquad (4.50)$$

Решая уравнение (4.50), найдем собственные частоты системы:

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{C_2 m_1 + (C_1 + C_2) m_2 \pm \sqrt{\left[C_2 m_1 + (C_1 + C_2) m_2 \right]^2 - 4 m_1 m_2 C_1 C_2}}{2 m_1 m_2}} .$$

Каждому корню уравнения (4.50) соответствует выражение типа $q_i = A_i \sin k_i t$, следовательно, общее решение представляет собой сумму частных решений. Для примера 4.4 имеем:

$$\left.\begin{aligned} q_1 = A_{11} \sin k_1 t + A_{12} \sin k_2 t; \\ q_2 = A_{21} \sin k_1 t + A_{22} \sin k_2 t. \end{aligned}\right\} \qquad (4.51)$$

В уравнениях (4.51) амплитудам приписаны два индекса: первый обозначает номер координаты, а второй - номер собственной частоты. Амплитуды, а также в общем случае начальные фазы колебаний находятся по начальным условиям процесса.

Итак, собственные линейные колебания системы с двумя степенями свободы состоят из суммы двух гармонических колебаний с частотами k_1 и k_2.

4.4. Прочие виды колебаний механических систем

Помимо рассмотренных выше колебаний можно указать еще некоторые особые их виды. ***Параметрические колебания*** возникают в том случае, если при движении периодически меняются какие-либо параметры системы (жесткости, моменты инерции). ***Автоколебания*** поддерживаются за счет энергии, поступающей в систему из внешних источников. Указанные виды колебаний рассмотрены в специальной литературе [10].

Глава 5. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

5.1. Функция Гамильтона и функция Лагранжа

Движение голономной системы в потенциальном поле, как было показано в разделе 3.5, может быть описано системой дифференциальных уравнений второго порядка (3.17) - уравнениями Лагранжа второго рода. Однако решение уравнений второго порядка вызывает значительные трудности, поэтому в ряде случаев удобнее перейти от подобных сложных систем к более простым уравнениям первого порядка.

Такой переход осуществил Р. Гамильтон, который предложил особую функцию трёх переменных: обобщённой координаты q_i, времени t и ***обобщённого импульса*** p_i - частной производной кинетического потенциала по обобщенной скорости:

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i, \quad (i = 1, 2, ..., s).$$

Физический смысл обобщённых импульсов Гамильтона можно показать на простейшем примере. При движении в пространстве свободной материальной точки массы m её обобщённые координаты $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. Кинетическая энергия точки является функцией обобщенных скоростей:

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2.$$

Потенциальная энергия $\Pi = \Pi(q_i)$ от обобщенных скоростей не зависит. Вследствие этого обобщенные импульсы находятся как частные производные функции Лагранжа или кинетической энергии по обобщенным скоростям:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\,.$$

Как известно, импульс, или количество движения точки есть произведение массы этой точки на ее скорость: $P = mV$ [6]. Следовательно, обобщенные импульсы $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$ - это проекции количества движения системы на координатные оси.

Параметры q_i, p_i, t называются *переменными Гамильтона;* функция, введённая в рассмотрение этим учёным, также носит его имя и обозначается первой буквой этого имени:

$$H = H(q_i, p_i, t).$$

Напомним, что функция Лагранжа зависит от обобщённых координат, обобщённых скоростей и времени (см. раздел 3.1), то есть $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, где ***параметры*** q_i, $\dot{q}_i$, ***t- это переменные Лагранжа***.

Математическое выражение функции Гамильтона можно получить из функции Лагранжа путём специального преобразования, сделанного по методу французского учёного Лежандра.

Лежандр (Legendre) Адриен Мари (1752-1833)- известный французский математик. Труды по теории чисел, геометрии, а также геодезии, практическое применение которой связано с переходом от одних систем переменных к каким-либо другим.

Функции Лагранжа и Гамильтона, составленные для механических систем со стационарными связями, явно от времени не зависят, поэтому в указанном случае $L = L(q_i, \dot{q}_i)$, $H = H(q_i, p_i)$. Очевидно, указанные функции содержат две различные переменные: $(\dot{q}_i, p_i)$ - и по одной общей переменной (q_i). Для такого случая Лежандром предложена следующая формула перехода:

$$F(x, v) = yv - f(x, y). \tag{5.1}$$

При многих однородных переменных:

$$F(x_i, v_i) = \sum_{i=1}^{s} y_i v_i - f(x_i, y_i). \tag{5.2}$$

При переходе от функции Лагранжа к функции Гамильтона имеем: $F = H$, $f = L$, $x = q_i$, $y = \dot{q}_i$, $v = p_i$.

Подставив указанные функции и переменные в формулу (5.2), получим выражение функции Гамильтона:

$$H = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i - L\ . \tag{5.3}$$

Покажем физический смысл функции Гамильтона. Представим обобщённый импульс как произведение инерционного коэффициента на обобщённую скорость: $p_i = a_i \dot{q}_i$. Тогда можно утверждать, что входящее в формулу (5.3) под знаком суммы произведение $\dot{q}_i p_i$ есть удвоенная кинетическая энергия. Действительно, из формулы (4.5) получим: $\sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i a \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{s} a \dot{q}_i^2 = 2T$. Учтем также, что входящий в функцию Гамильтона кинетический потенциал есть разность кинетической и потенциальной энергии: $L = T - \Pi$. Вследствие этого $H = 2T - T + \Pi = T + \Pi$, то есть ***функция Гамильтона равна полной механической энергии системы***. При этом кинетическая составляющая энергии зависит от обобщенных импульсов, а не от обобщенных скоростей.

Как известно, при определённых условиях один вид энергии может переходить в какой-либо другой её вид. Поэтому функция Гамильтона с помощью предельного перехода может быть распространена на сплошные среды, а также на физические поля, причём для последних делается замена механической энергии на энергию, соответствующую данному полю, например, электромагнитную или световую. Функция и принцип Гамильтона используются также в релятивистской механике. Рассмотрим далее примеры составления функций Гамильтона.

Пример 5.1

Составить функцию Гамильтона для свободной материальной точки массы m, движущейся в поле консервативных сил.

Как было показано выше, кинетическая энергия материальной точки определяется выражением:

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\big/2 \cdot \tag{5.4}$$

Запишем функцию Гамильтона: $H = T(p_i) + \Pi$ - и выразим кинетическую энергию через обобщенные импульсы . Обобщённые скорости через обобщённые импульсы определяются следующим образом:

$$p_x = \partial L / \partial \dot{x} = \partial T / \partial \dot{x} = m\dot{x}, \quad \text{откуда} \quad \dot{x} = p_x / m;$$

$$p_y = \partial L / \partial \dot{y} = \partial T / \partial \dot{y} = m\dot{y}, \quad \text{откуда} \quad \dot{y} = p_y / m;$$

$$p_z = \partial L / \partial \dot{z} = \partial T / \partial \dot{z} = m\dot{z}, \quad \text{откуда} \quad \dot{z} = p_z / m.$$

После подстановки полученных значений обобщенных скоростей в формулу (5.4) получим:

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}.$$

Потенциальную энергию запишем как функцию обобщенных координат: $\Pi = \Pi(x, y, z)$. Функция Гамильтона имеет вид:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z).$$

Пример 5.2

Записать функцию Гамильтона, если для заданной системы известна функция Лагранжа (лагранжиан):

$$L = 0{,}5(I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_2\dot{\varphi}_2^2) - 0{,}5\left[(C_1 + C_2)\varphi_1^2 - 2C_2\varphi_1\varphi_2 + C_2\varphi_2^2\right] \qquad (5.5)$$

Решаем пример следующим образом. Первое слагаемое выражения (5.5) – это кинетическая энергия:

$$T = 0{,}5(I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_2\dot{\varphi}_2^2). \qquad (5.6)$$

Выразим кинетическую энергию через обобщённые импульсы:

$$p_1 = \partial L / \partial \dot{\varphi}_1 = \partial T / \partial \dot{\varphi}_1 = I_1\dot{\varphi}_1, \text{ откуда } \dot{\varphi}_1 = p_1 / I_1, \qquad (5.7)$$

$$p_2 = \partial L / \partial \dot{\varphi}_2 = \partial T / \partial \dot{\varphi}_2 = I_2\dot{\varphi}_2, \text{ откуда } \dot{\varphi}_2 = p_2 / I_2. \qquad (5.8)$$

Подставляя выражения (5.7) и (5.8) в уравнение (5.6), получим:

$$T = 0{,}5(p_1^2 / I_1 + p_2^2 / I_2).$$

Потенциальная энергия - второе слагаемое суммы (5.5) - входит в выражение функции Гамильтона со знаком плюс: $H = T + \Pi$. После соответствующих подстановок имеем:

$$H = 0{,}5(p_1^2 / I_1 + p_2^2 / I_2) + 0{,}5\left[(C_1 + C_2)\varphi_1^2 - 2C_2\varphi_1\varphi_2 + C_2\varphi_2^2\right]$$

Укажем порядок перехода от функции Лагранжа к функции Гамильтона. Вначале следует выделить из выражения функции Лагранжа составляющую кинетической энергии $T(\dot{q}_i) = L - \Pi$ и найти обобщённые импульсы: $p_i = \partial T / \partial \dot{q}_i$. Затем нужно выразить обобщённые скорости через обобщенные импульсы и представить кинетическую энергию в виде функции последних: $T = T(p_i)$. И, наконец, учитывая знак при потенциальной составляющей лагранжиана, можно составить функцию Гамильтона, $H = T(p_i) + \Pi$.

5.2. Уравнения Гамильтона

На основе рассмотренной выше функции Гамильтона были получены уравнения движения механических систем, которые считаются ***каноническими*** и с учетом соответствующих аналогий применяются во многих областях физики.

Название этих уравнений происходит от греческого слова kanonikos, которое означает «установленное правилом», « принятое за образец».

Выведем канонические уравнения движения, пользуясь формулой Лежандра (5.1): $F = yv - f$. В данном рассмотрении функция $F = F(x, v)$ называется ***искомой***, функция $f = f(x, y)$ - ***исходной***, или ***производящей***.

Полный дифференциал искомой функции

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial v} dv \, . \tag{5.9}$$

В то же время, в соответствии с формулой (5.1),

$$dF = ydv + vdy - df \, . \tag{5.10}$$

Найдем полный дифференциал исходной функции *df*:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \, .$$

Учитывая физический смысл переменных y и v (см. разд. 5.1), обозначим: $\partial f / \partial y = v, \quad \partial f / \partial x = u$.

Так как $f = f(x, y)$, то $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Справедливо и обратное утверждение: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ [1].

Таким образом, $df = udx + vdy$.

Подставим полученное значение df в формулу (5.10):

$$dF = ydv + vdy - udx - vdy.$$

После сокращения подобных членов:

$$dF = -udx + ydv. \tag{5.11}$$

Сравнивая коэффициенты при dx и dv в уравнениях (5.9) и (5.11), получим:

$$\partial F/\partial x = -u; \qquad \partial F/\partial v = y. \tag{5.12}$$

Обобщим полученный результат на случай любого числа переменных и, кроме того, перейдем к переменным функции Лагранжа ($f = L$) и функции Гамильтона ($F = H$). Как было принято в разд. 5.1, $x_i = q_i$; $y_i = \dot{q}_i$; $v_i = p_i$ $(i = 1,2, \ldots s)$. Тогда

$$\partial H/\partial q_i = -u_i, \quad \partial H/\partial p_i = \dot{q}_i. \tag{5.13}$$

В уравнениях (5.13) остается нерасшифрованной переменная u_i. Определим ее следующим образом. Как было указано в разделе 5.1, обобщенный импульс есть частная производная функции Лагранжа по обобщенной скорости: $\partial L/\partial \dot{q}_i = p_i$. Но от обобщенных скоростей зависит только кинетическая энергия, которая входит составной частью также и в функцию Гамильтона, поэтому можно записать:

$$\partial H/\partial \dot{q}_i = p_i. \tag{5.14}$$

Возьмем производные по времени от обеих частей равенства (5.14) и, пользуясь переместительным свойством операторов, запишем:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\frac{d}{dt}(\partial q_i)}\right] = \frac{d}{dt}(p_i). \tag{5.15}$$

Сокращая на оператор d/dt левую часть равенства (5.15), учитывая, что $\frac{d}{dt}(p_i) = \dot{p}_i$, а также принимая во внимание (5.12), получим: $\partial H/\partial q_i = -\dot{p}_i$.

В результате имеем два ряда уравнений Гамильтона:

$$\partial H/\partial q_i = -\dot{p}_i, \text{ или } \partial H/\partial q_i = dp_i/dt, \quad (i=1, 2, \ldots s); \quad (5.16)$$

$$\partial H/\partial p_i = \dot{q}_i, \text{ или } \partial H/\partial p_i = dq_i/dt, \quad (i=1, 2, \ldots s). \quad (5.17)$$

При составлении канонических уравнений для систем с нестационарными связями нужно учитывать, что в таких случаях функции Лагранжа и Гамильтона явно зависят от времени. Поэтому, кроме уравнений (5.16) и (5.17), следует принять еще одно равенство, включающее в себя переменную t – время [7].

Запишем:
$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (5.18)$$

Из (5.3) имеем:
$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.19)$$

Из (5.18) и (5.19) получим:
$$\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t. \quad (5.20)$$

Таким образом, в общем случае, если система имеет $W=s$ степеней свободы, то для нее следует составить $(2s+1)$ уравнений Гамильтона.

Пример 5.3

Составить уравнения движения системы в форме Гамильтона, если лагранжиан механической системы имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} - Cl^2\varphi^2 - \frac{Cx^2}{2} + Clx\varphi. \quad (5.21)$$

Первые слагаемые уравнения (5.21) характеризуют кинетическую энергию системы в зависимости от обобщенных скоростей:

$$T(\dot{q}_i) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}. \quad (5.22)$$

Найдем обобщенные импульсы и выразим через них кинетическую энергию: $p_1 = \partial T/\partial \dot{x} = m\dot{x}$, откуда $\dot{x} = p_1/m$; $p_2 = \partial T/\partial \dot{\varphi} = I\dot{\varphi}$, откуда $\dot{\varphi} = p_2/I$. Подставим p_1 и p_2 в (5.22):

$$T = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2I}.$$

Потенциальная энергия Π – это три последних члена уравнения (5.21); они войдут в выражение функции Гамильтона с противоположными знаками. Таким образом, функция Гамильтона будет иметь вид:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2I} + Cl^2\varphi^2 + \frac{Cx^2}{2} - Clx\varphi. \qquad (5.23)$$

Дифференцируем уравнение (5.23) по переменным p_1, p_2, x и φ в соответствии с (5.16) и (5.17):

$$\dot{q}_1 = \partial H/\partial p_1 = p_1/m; \text{ так как } q_1 = x, \text{ имеем } \dot{x} = p_1/m; \qquad 5.24)$$

$$\dot{q}_2 = \partial H/\partial p_2 = p_2/I; \text{ так как } q_2 = \varphi, \text{ имеем } \dot{\varphi} = \frac{p_2}{I}; \qquad (5.25)$$

$$\dot{p}_1 = -\partial H/\partial x = -(Cx - Cl\varphi), \text{ или } \dot{p}_1 = C(l\varphi - x); \qquad (5.26)$$

$$\dot{p}_2 = -\partial H/\partial \varphi = -(2Cl^2\varphi - Clx), \text{ или } \dot{p}_2 = Cl(x - 2l\varphi). \qquad (5.27)$$

Полученные выражения (5.24) - (5.27) являются уравнениями Гамильтона.

Пример 5.4

Составить уравнения Гамильтона для свободной материальной точки, движущейся в поле консервативных сил.

В примере 5.1 была составлена функция Гамильтона для заданных условий: $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$.

Дифференцируя это выражение по обобщенным импульсам и обобщенным координатам, получим шесть уравнений движения в форме Гамильтона:

$$\dot{x} = \partial H/\partial p_x, \text{ или } dx/dt = p_x/m;$$
$$\dot{y} = \partial H/\partial p_y, \text{ или } dy/dt = p_y/m;$$
$$\dot{z} = \partial H/\partial p_z, \text{ или } dz/dt = p_z/m;$$
$$\dot{p}_x = -\partial H/\partial x, \text{ или } dp_x/dt = -\partial \Pi/\partial x;$$
$$\dot{p}_y = -\partial H/\partial y, \text{ или } dp_y/dt = -\partial \Pi/\partial y;$$
$$\dot{p}_z = -\partial H/\partial z, \text{ или } dp_z/dt = -\partial \Pi/\partial z.$$

5.3. Интегрирование канонических уравнений движения

Интегрирование уравнений Гамильтона в случае циклических координат

Задача интегрирования канонических уравнений заключается в определении переменных q_i и p_i в функциях времени и произвольных постоянных. Если система имеет s обобщенных координат, то, как следует из раздела 5.1, потребуется найти $s+1$ самостоятельных, независимых друг от друга решений (первых интегралов).

Решение уравнений, описывающих движение механической системы, всегда представляет большие или меньшие сложности, но в отдельных случаях процесс интегрирования упрощается, например, в случае циклических координат.

Обобщенные координаты, которые не входят явно в функции Гамильтона и Лагранжа, называются циклическими. Обобщенные координаты, которые входят в указанные функции H и L в явном виде, называются позиционными.

Рассмотрим прежде всего случай, когда функция Гамильтона явно не зависит от времени, что имеет место при стационарных связях. Из уравнения (5.20) имеем $\partial H/\partial t = 0$, откуда $H = const$. Как известно, $H = T + П$, следовательно при стационарных связях одно из решений уравнений Гамильтона – постоянное значение механической энергии системы. В аналитической механике полная величина механической энергии системы носит название ***интеграла энергии*** и обозначается литерой h, таким образом, в данном случае $T + П = h$.

Рассмотрим далее систему со стационарными связями, имеющую s обобщенных координат. Если все эти координаты позиционные, то функция Гамильтона зависит как от них, так и от всех обобщенных импульсов:

$$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_s, p_1, p_2, \ldots, p_s).$$

Если же первые k координат из общего числа s - циклические, то функция Гамильтона H будет зависеть только от координат, начиная с номера $(k+1)$, и от всех импульсов:

$$H = H(q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots q_s, p_1, p_2, \ldots p_s). \tag{5.28}$$

Найдем первые k решений системы канонических уравнений, соответствующие обобщенным координатам $q_1,.q_2,...q_i,...q_k$, для чего продифференцируем функцию Гамильтона в соответствии с уравнениями (5.16). Так как циклические координаты в эту функцию явно не входят, то соответствующие производные будут равны нулю. Для циклической координаты q_i будем иметь: $\partial H/\partial q_i = 0$. В то же время $\partial H/\partial q_i = -dp_i/dt$, следовательно, $dp_i/dt = 0$, и после интегрирования последнего уравнения получим: $p_i = \alpha_i$, где α_i - некоторая постоянная.

Так как система имеет k циклических координат, то аналогично можно получить k независимых друг от друга решений: $p_1 = \alpha_1$; $p_2 = \alpha_2$; ... $p_i = \alpha_i$; ... $p_k = \alpha_k$.

Импульсы $p_1, p_2,...p_i,...p_k$ называются циклическими; они, как было показано выше, постоянны по величине, и в данном случае вместо (5.28) будем иметь:

$$H = H(q_{k+1},.q_{k+2},...,q_s,.\alpha_1,.\alpha_2,...\alpha_k,.p_{k+1},...,p_s). \qquad (5.29)$$

Найдем еще k решений системы канонических уравнений, дифференцируя уравнение (5.29) по циклическим импульсам в соответствии с уравнениями (5.17). Заметим при этом, что $H = H(\alpha_i)$, поэтому $\partial H/\partial \alpha_i \neq 0$. Продифференцируем и обозначим $\partial H/\partial p_i = \partial H/\partial \alpha_i = \beta_i$. С другой стороны, $\partial H/\partial p_i = dq_i/dt$, следовательно, $dq_i/dt = \beta_i$. После интегрирования имеем:

$$q_i = \beta_i t + \gamma_i, \quad (i=1,\ 2,..k). \qquad (5.30)$$

Здесь $\beta_i,.\gamma_i$, так же, как и α_i, некоторые постоянные, определяемые по начальным условиям движения. Уравнения (5.30) показывают, что полученные решения линейно зависят от времени.

Итак, при наличии k циклических координат легко получить $2k$ решений системы канонических уравнений. Остальные $2s-2k$ интегралов находятся по общим правилам решения систем дифференциальных уравнений.

Пример 5.5

Составить и решить уравнения движения по инерции механической системы, состоящей из n материальных точек.

При движении по инерции отсутствует воздействие каких-либо сил в отличие от движения точки в потенциальном поле сил, поэтому $П = 0$, и функция Гамильтона будет иметь вид:

$$H = T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2). \qquad (5.31)$$

Здесь $\dot{x}_k$, $\dot{y}_k$, $\dot{z}_k$ - обобщенные скорости точек. Обобщенные координаты x_k, y_k z_k в выражение функции Гамильтона не входят, и, следовательно, являются циклическими.

Выразим кинетическую энергию через обобщенные импульсы. По аналогии с примерами 5.1, 5.4 получим:

$$H = T(p_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2m_k}(p_{x_k}^2 + p_{y_k}^2 + p_{z_k}^2). \qquad (5.32)$$

При дифференцировании выражения (5.32) по циклическим координатам в соответствии с уравнениями (5.16) получим:

$$\partial H/\partial x_k = 0; \quad \partial H/\partial y_k = 0; \quad \partial H/\partial z_k = 0,$$

следовательно, $dp_{x_k}/dt = 0; \quad dp_{y_k}/dt = 0; \quad dp_{z_k}/dt = 0.$

Имеем серию циклических импульсов, постоянных по величине: $p_{x_k} = \alpha_{1_k}$; $p_{y_k} = \alpha_{2_k}$; $p_{z_k} = \alpha_{3_k}$, причем *k=1, 2,.. n*.

После подстановки циклических импульсов в уравнение (5.32) функция Гамильтона приобретает вид:

$$H = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2m_k}(\alpha_{1_k}^2 + \alpha_{2_k}^2 + \alpha_{3_k}^2). \qquad (5.33)$$

Дифференцируем выражение (5.33) по обобщенным импульсам:

$\partial H/\partial \alpha_{1_k} = \alpha_{1_k}/m_k; \quad \partial H/\partial \alpha_{2_k} = \alpha_{2_k}/m_k; \quad \partial H/\partial \alpha_{3_k} = \alpha_{3_k}/m_k.$

Обозначим: $\alpha_{1_k}/m_k = \beta_{1_k}; \quad \alpha_{2_k}/m_k = \beta_{2_k}; \quad \alpha_{3_k}/m_k = \beta_{3_k}.$

Тогда в соответствии с уравнениями (5.17) можно записать:

$$dx_k/dt = \beta_{1_k}; \quad dy_k/dt = \beta_{2_k}; \quad dz_k/dt = \beta_{3_k}. \qquad (5.34)$$

Интегрируем уравнения (5.34), причем вводим произвольные постоянные γ_{1_k}, γ_{2_k}, γ_{3_k}. Уравнения координат точек системы:

$$x_k = \beta_{1_k} t + \gamma_{1_k}; \quad y_k = \beta_{2_k} t + \gamma_{2_k}; \quad z_k = \beta_{3_k} t + \gamma_{3_k}; \quad (k=1, 2, \ldots n).$$

Очевидно, при движении системы по инерции координаты всех её точек линейно зависят от времени.

Специальные способы решения систем канонических уравнений

Существуют специальные способы решения систем канонических уравнений. Это, например, ***метод Пуассона***, позволяющий по двум известным интегралам получить третье решение с помощью специального оператора – «скобок Пуассона», а также ***метод Якоби***. Эти методы решения рассматриваются в литературе по аналитической механике [1], [7].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беленький И.М. Аналитическая механика. - М.: Наука, 1965.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2000. - 416 с.

3. Красковский Е.Я., Дружинин Ю.А., Филатова Е.М. Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем. - М.: Высшая школа, 1991. - 480 с.

4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: В 2-х т. -М.: Наука, 1978. Т.2-624 с.

5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2-х т. - М.: Наука, 1981. Т.2. - 464 с.

6. Савельев И.В. Курс общей физики: В 3-х т. - М.: Наука, 1987. Т.1 – 432 с.

7. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: В 2-х Ч. - М.: Наука, 1972. Ч 2. - 332 с.

8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2-х т. - М.: Наука, 1976. Т. 1. – 456 с.

9. Емельянов Ю.Н. и др. Статика, кинематика и динамика. Сборник задач. - М.: / МИРЭА, 1997, 68с.

10. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. - М.: Наука, 1994. - 253 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Менькова Надежда Марковна

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ

Учебное пособие

Редактор Л.Г.Алехин

Литературный редактор Л.В. Омельянович

Подписано в печать 19.07.2006. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,65. Усл. кр.-отт. 18,6. Уч.-изд. л. 5,0.
Тираж 200 экз. С 492

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)»
119454, Москва, пр. Вернадского, 78